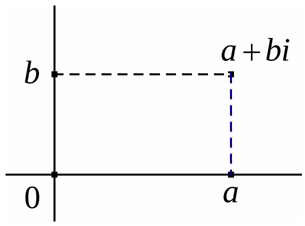
Appendix A: Complexe getallen

1. Definitie

Beschouw $\mathbb{R}^2$ en noteer het koppel $(1,0)$ door 1 en het koppel $(0,1)$ door i.

We weten: $\forall a,b \in \mathbb{R} : (a,b) = a(1,0) + b(0,1)$.



In overeenstemming met de zojuist ingevoerde notatie noteren we ieder element $z = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ als volgt: $z = a + bi$.

In de notatie $z = a + bi$ noemt men :

- a het reëel deel van z ; $\operatorname{Re} z$, en
- b het imaginair deel van z ; $\operatorname{Im} z$.

Om veelvuldig gebruik van haken te vermijden, spreken we af dat $a + (-b)i = a - bi$.

$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ noemt men de verzameling van complexe getallen.

Gelijkheid

$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{C} : a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ en $b = d$.

Bewerkingen

We voeren een vermenigvuldiging in d.m.v. de volgende, misschien eigenaardig overkomende, vermenigvuldigingsregel; nl. we stellen $i^2 = -1$.

Voor de rest behouden we de traditionele regels en eigenschappen voor de optelling en vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$. Zo verkrijgen we:

Som $\quad (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Scalair produkt $\quad r(a + bi) = (ra) + (rb)i$ met $r \in \mathbb{R}$

Produkt $\quad (a + bi).(c + di) = ac + adi + bci + bd\, i^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Met deze bewerkingen structureren we $\mathbb{C}$ tot de commutatieve groep $\mathbb{C},+,\cdot$. We weiden hier niet verder over uit alleen dat $\mathbb{C},+,\cdot$ beschouwd kan worden als een uitbreiding van de reële getallen $\mathbb{R},+,\cdot$. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ nl. de complexe getallen met imaginair deel gelijk aan nul.

Tegengestelde en omgekeerde

Voor ieder complex getal $z = a + bi$ noemen we $-z = -a - bi$ het tegengestelde van *z*. $-z$ is het uniek complex getal waarvoor geldt dat $-z + z = z + (-z) = 0$.

Het omgekeerde van een complex getal $z = a + bi \neq 0$ definiëren we als het complex getal $\frac{1}{z}$ met de eigenschap : $z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = 1$. Ook dit omgekeerde complex getal is uniek.

Met de traditionele rekenregels bekomen we:

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i .$$

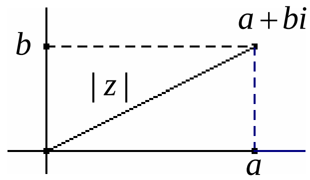
Quotiënt

Het quotiënt van twee complexe getallen definiëren we als volgt: $\forall z, w \in \mathbb{C}, w \neq 0 : \dfrac{z}{w} = z \cdot \dfrac{1}{w}$.

Het praktisch rekenwerk verloopt als volgt: $\dfrac{3-2i}{1+i} = \dfrac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-5i}{2} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{5}{2}$.

2. Goniometrische vorm van een complex getal

2.1 Modulus van een complex getal



Voor ieder complex getal z definiëren we een reëel getal $|z|$, dat we de modulus van z noemen als volgt:
$\forall z = a+bi \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Eigenschappen

Voor $z, w \in \mathbb{C}$ geldt:

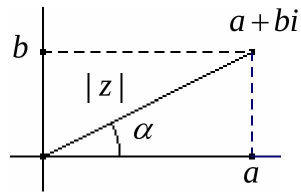
(i) $|z| \geq 0$ en $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(ii) $\operatorname{Re} z \leq |z|$ en $\operatorname{Im} z \leq |z|$

(iii) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(iii) $|z+w| \leq |z| + |w|$

2.2 Argument van een complex getal



Zij $z = a+bi \in \mathbb{C}_0$ met $|z| = r$. De complexe getallen met modulus r liggen op een cirkel met als middelpunt de oorsprong en als straal *r.*

Opdat een complex getal ($\neq 0$) volledig bepaald is in het vlak, hebben we samen met de modulus nog een tweede karakteristiek van het complex getal nodig.

Een argument van een complex getal z is een waarde van de georiënteerde hoek α die de positieve X-as als beginbeen heeft en de halfrechte $[oz$ als eindbeen.

Het argument gelegen in het interval $[0, 2\pi[$ noemen we het hoofdargument, kortweg het argument.

Uit de rekenregels voor rechthoekige driehoeken weten we: $\cos\alpha = \dfrac{a}{r}$ en $\sin\alpha = \dfrac{b}{r}$.

Merk op dat voor $z = 0$ het argument niet gedefinieerd is.

Opdat twee complexe getallen ($\neq 0$) aan elkaar gelijk zijn, moeten de moduli gelijk zijn en de argumenten op een geheel veelvoud van 2π na aan elkaar gelijk zijn.

2.3 Goniometrische vorm van een complex getal

Beschouw $z = a+bi \in \mathbb{C}_0$ met modulus r en een argument α . Meestal neemt men hier het hoofdargument. Uit het vorige punt weten we dat $a = r\cos\alpha$ en $b = r\sin\alpha$ zodat
$a+bi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Deze uitdrukking noemen we de *goniometrische vorm* van $a+ib$.

Merk op.

$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \in \mathbb{C}_0$ is zuiver imaginair (reëel deel gelijk aan nul) $\Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$
en z is zuiver reëel (imaginair deel gelijk aan nul) $\Leftrightarrow \alpha = k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$.

2.4 Rekenen met complexe getallen in goniometrische vorm

Voor $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_0$ met de volgende goniometrische voorstellingen: $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ en $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ geldt:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{|z_1|}(\cos(-\varphi_1) + i\sin(-\varphi_1)) \text{ en } \frac{z_2}{z_1} = z_2 \cdot \frac{1}{z_1} = \frac{|z_2|}{|z_1|}(\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i\sin(\varphi_2 - \varphi_1))$$

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) .$$

Hieruit volgt dat het kwadrateren van een complex getal $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ neerkomt op het kwadrateren van de modulus en het verdubbelen van het argement:
$z^2 = |z|^2 (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$.

2.5 Exponentiële voorstelling van een complex getal

Een complex getal $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ noteren we ook als volgt: $z = |z| e^{i\alpha}$.

De formule van Euler*, $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, verklaart de exponentiële voorstelling van een complex getal. Deze notatie van complexe getallen wordt o.a. gebruikt in de fysica bij de studie van wisselstromen.

Voor de complexe getallen $z_1 = |z_1| e^{i\alpha_1}$ en $z_2 = |z_2| e^{i\alpha_2}$ gedlt:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{|z_1|} e^{-i\alpha_1}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

$$z_1^{\ n} = |z_1|^n \ e^{in\alpha_1}$$

(*) De formule van Euler kan bewezen worden met (complexe) reeksontwikkeling.