Dynamische processen
Zelfstudieopdracht 6

Oplossen van eenvoudige differentiaalvergelijkingen.

1. $y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 0$ met $y(0) = y_0$

   De functie waarvan de afgeleide functie gelijk is aan 0 is een constante functie. Rekening houdend met de beginvoorwaarde bekomen we als oplossing: $y(t) = y_0$.

2. $y'(t) = a(\neq 0)$ met $y(0) = y_0$

   De functie met als afgeleide een constante is een functie van de eerste graad. Rekening houdend met de beginvoorwaarde is de oplossing: $y(t) = at + y_0$.

3. $y'(t) = at + b$ met $y(0) = y_0$ heeft als oplossing een functie van de tweede graad:

   $y(t) = \frac{a}{2}t^2 + bt + y_0$.

4. $y'(t) = ay(t)$ met $a \neq 0$

   Men kan bewijzen dat de exponentiële functie $y(t) = ke^{at}$ de enige functie is die evenredig is met zijn afgeleide functie. Invullen van de beginvoorwaarde $y(0) = y_0 = ke^0 = k$ geeft de oplossing: $y(t) = y_0 e^{at}$.

Opgave 1
Los op: $y'(t) = 5y(t)$ met $y_0 = 10$ en stel de oplossing grafisch voor.

Teken de oplossing van $y'(t) = -5y(t)$ met $y_0 = 10$ en vergelijk de grafieken.

Opgave 2
Op 1 januari 2005 waren in België 10,5 miljoen inwoners. De groeisnelheid na t jaar is rechtevenredig met het aantal inwoners op dat ogenblik met als evenredigheids-factor $0,001$.

Stel de differentiaalvergelijking op en bepaal de oplossing. Schets de evolutie van de bevolking en bereken hoeveel inwoners er zijn op 1 januari 2015.

Bereken de procentuele toename per jaar.

<u>Hint</u>: $e^{0,001t} = a^t$.

Opgave 3
De snelheid waarmee de massa van een radioactief isotoop op een tijdstip t (in dagen) afneemt is rechtevenredig met de massa op dat ogenblik. De halveringstijd bedraagt 16 dagen. Na 30 dagen blijft er nog 30 gram over.

Bereken de oorspronkelijke massa van het isotoop en bepaal de differentiaalvergelijking.

Bepaal de oplossing $m(t)$ van deze vergelijking en noem de oorspronkelijke massa m_0. Gebruik in deze oplossing $m(t)$ eerst de halveringstijd en daarna de andere gegevens.

5. $y'(t) = ay(t) + b$

- We lossen de vergelijking $y'(t) = ay(t)$ op (geval 4), $y_h(t) = ke^{a.t}$, en noemen dit de homogene oplossing van de differentiaalvergelijking.
- $y_p(t) = -\frac{b}{a}$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking (controleer), hetgeen men een particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking noemt.
- Gebruikmakend van de homogene oplossing en een particuliere oplossing kan de algemene oplossing steeds als volgt worden geschreven:

  $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = ke^{at} - \frac{b}{a}$.

  Voor t = 0 bekomen we $y_0 = k - \frac{b}{a} \Rightarrow k = y_0 + \frac{b}{a}$.

  Wat leidt tot $y(t) = (y_0 + \frac{b}{a})e^{at} - \frac{b}{a}$.

Opgave 4

Los op: $y'(t) = -0,5y(t) + 10$ en $y_0 = 30$.

Bereken en schets de oplossing en bepaal de horizontale asymptoot.