Iteratie
Zelfstudieopdracht 9

Bifurcatie

Dynamisch gedrag van $F(x) = x^2 + c$ met $c \in \mathbb{R}$.

1. De vaste punten van F zijn de oplossingen van de vergelijking ……………
   Het aantal oplossingen is afhankelijk van ……..

   a. Neem $c > \frac{1}{4}$.

      Bepaal grafisch de baan van enkele startwaarden voor $F(x) = x^2 + 1$.
      Wat kan je besluiten?

   b. Neem $c = \frac{1}{4}$.

      Bereken het vast punt p_1 en bepaal de baan voor:

      - startwaarden $|x| > \frac{1}{2}$,
      - startwaarden $\frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}$,
      - startwaarde $\frac{-1}{2}$.

      Kan je de verzameling x-waarden bepalen die worden aangetrokken door het vast punt? En wat voor de andere x-waarden?

      Bereken $F'(p_1)$. Bevestigt dit getal je conclusie over de neutraliteit van p_1?

   c. Neem c < $\frac{1}{4}$.

      Bepaal de vaste punten p_1 en p_2 ($p_1 < p_2$) en het dynamisch gedrag van $F(x) = x^2$. Onderzoek grafisch de banen van x met:

      - $|x| > 1$,
      - $-1 < x < 1$,
      - $x = -1$.

      Kan je de verzameling x-waarden bepalen die worden aangetrokken door p_1?

   <u>Besluit</u>:

   Uit je concrete bevindingen kunnen we veralgemenen: voor $c > \frac{1}{4}$ is er geen vast punt, voor $c = \frac{1}{4}$ is er 1 vast punt en voor $c > \frac{1}{4}$ zijn er 2 vaste punten.

   Deze opsplitsing bij $c = \frac{1}{4}$ noemen we een <u>**bifurcatie**</u>.

2. We bestuderen iteraties van $F(x) = x^2 + c$ met $c < \frac{1}{4}$.

   a. Schrijf de algemene vorm van de vaste punten p_1 en p_2.

      Bereken $F'(p_1)$ en $F'(p_2)$.

      Wat besluit je hieruit over het aantrekkend of afstotend zijn van p_1 en p_2?

   b. Zal het aantrekkend zijn van p_1 blijven duren?

$$|F'(p_1)| < 1 \Leftrightarrow -1 \underset{(1)}{<} F'(p_1) \underset{(2)}{<} 1$$

      Los beide voorwaarden, (1) en (2), algebraïsch op.

      Wat besluit je hieruit voor c in functie van het al dan niet aantrekkend zijn van p_1?

Uit het voorgaande volgt:

$\forall c \in]-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}[$ is $p_1 = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$ aantrekkend en $p_2 = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$ afstotend.

Algemeen kunnen we stellen dat het aantrekkingsgebied $]-p_2, p_2[$ is (zie voorgaande concrete voorbeelden).

- Verifieer dit voor $c = -\frac{1}{2}$.
- Bereken $F'(p_1)$ voor $c = -\frac{3}{4}$.

Is p_1 nog aantrekkend?

Deze c-waarde betekent het einde van p_1 aantrekkend.

We hebben hier opnieuw een **bifurcatie**.

Kies bijvoorbeeld $c = -1$.

- Bereken p_1 en p_2 (3 cijfers na de komma).
- Bereken de 2-cyclus p_3 en p_4 (met $p_3 < p_4$) van $F(x) = x^2 - 1$.

  Hint: Los $F^2(x) = x$ op.
- Bepaal grafisch de baan van een aantal waarden $x \in]-p_2, p_2[\setminus \{p_1\}$.

Wat stel je vast?

Theoretische bevestiging:
Een 2-cyclus p_3 en p_4 is aantrekkend op voorwaarde dat $|F''(p_3)| < 1$. En $|F''(p_4)| < 1$

Bereken deze 2[e] afgeleiden m.b.v. de kettingregel.

Algemeen: $F(x) = x^2 + c$.

- Bereken de 2-cyclus p_3 en p_4.

  Hint: denk eraan dat de vaste punten p_1 en p_2 van F ook vaste punten zijn van F^2.
- Bereken $|F''(p_3)| = |F''(p_4)| \underset{eig.}{=} |F'(p_3).F'(p_4)|$ en werk de dubbele voorwaarde uit voor een aantrekkende 2-cyclus: $-1 \underset{(1)}{<} |F''(p_3)| = |F''(p_4)| \underset{eig.}{=} |F'(p_3).F'(p_4)| \underset{(2)}{<} 1$.

Wanneer is er geen aantrekkende 2-cyclus meer?

Besluit: voor de 3[e] keer is er een **bifurcatie**

Lees op p 36 over het Feigenbaum-diagram.