2 Toepassingen van matrices

2.1 Matrices en verkeer

2.1.1 Definities

Een **graaf** is een figuur bestaande uit een eindig aantal punten (= knopen) en een eindig aantal verbindingslijnen (= takken) tussen die knopen.

Een graaf is **enkelvoudig** als voor elk tweetal knopen ten hoogste 1 verbinding bestaat. Indien er voor tenminste 2 knopen meerdere verbindingen bestaan dan spreekt men van een **meervoudige** graaf.

Twee knopen verbonden door tenminste 1 tak noemt men **buren** of verbonden knopen. Een tak die hetzelfde beginpunt en eindpunt heeft is een **lus**.

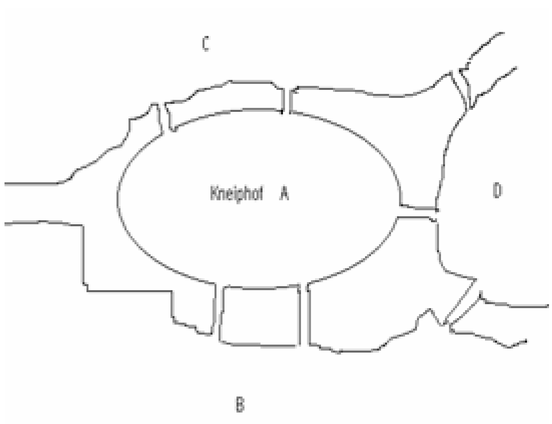
Een **pad** van een knoop p naar een knoop q is een rij van opeenvolgende verbindingslijnen startend in de knoop p en eindigend in de knoop q.

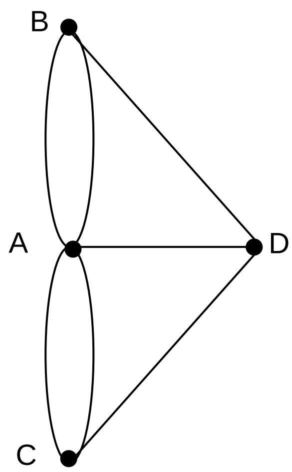
Bij n knopen zijn er maximaal $\frac{n\cdot(n-1)}{2}=\binom{n}{2}$ verbindingen.

2.1.2 Het probleem van Köningsberg

In Köningsberg (Oost-Pruisen - 18^e eeuw) vroegen de bewoners zich af of het mogelijk zou zijn een wandeling te maken over de 4 delen van de stad die verbonden zijn door 7 bruggen, en wel zo dat elke brug precies 1-maal werd gebruikt. Euler was de eerste die een bewijs gaf voor dit probleem.

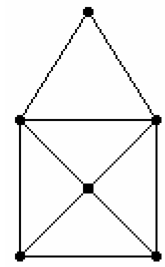
Euler stelde ieder deel voor door een punt en iedere brug door een lijn.





Stel namelijk dat er inderdaad een route bestaat waarbij je één keer elke brug passeert. Die tocht is logischerwijze ergens begonnen en ergens geëindigd. Het is ook logisch dat op elke halte tussen dat begin en einde een even aantal bruggen moet samenkomen. Immers: als je tijdens je tocht bijvoorbeeld op plein A komt, moet je er via een andere brug weer af (en beland je nog een keer in A, moet je er via weer een andere brug van af). Via dezelfde redenering begrijpen we ook dat zowel het start- als het eindpunt juist een oneven aantal bruggen moet hebben. Een zogenaamde Eulertocht lukt alleen als de graaf exact twee punten heeft met een oneven aantal verbindingen. En helaas, bij de Köningsberger-bruggen zijn alle vier punten oneven.

Een gelijkaardig probleem is of de figuur hiernaast in één pennetrek kan getekend worden.



Een graaf die aan de voorgaande probleemstelling voldoet, noemt men een Euler-pad.

Euler bewees* dat een graaf een Euler-pad is als het aantal punten met een oneven aantal verbindingspunten gelijk is aan nul of twee.

Indien er geen oneven punten zijn, noemt men de graaf een Euler-circuit. Het beginpunt mag willekeurig gekozen worden.

In het geval van twee oneven punten, kan je alleen met zekerheid zeggen dat er een Euler-pad is. Het beginpunt moet samenvallen met één oneven punt en het eindpunt met het andere.

Zoek uit medelijden met de burgers van Köningsberg een oplossing voor hun probleem.

2.1.3 Verbindingsmatrix

Definitie

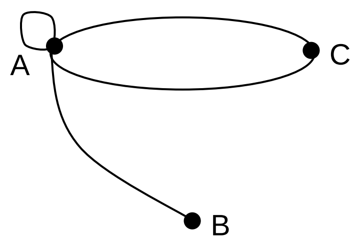
Bestaat een graaf K uit n knopen A_1 , A_2 , …, A_n dan stelt M de $n \times n$-verbindingsmatrix van K voor, waarbij:

> m_{ij} = 0 als A_i en A_j niet verbonden zijn en
> m_{ij} = 1 als A_i en A_j door minstens 1 tak verbonden zijn.

Opmerking

Het kan bij eenrichtingsverkeer dat $m_{ij} = 1$ en $m_{ji} = 0$

Voorbeeld: Graaf K met 3 knopen, $A_1 = \text{A}$, $A_2 = \text{B}$ en $A_3 = \text{C}$.

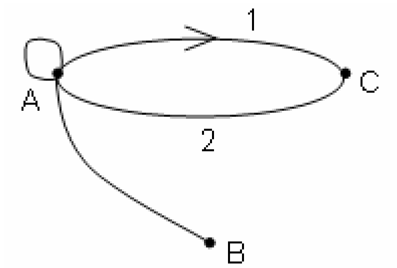


$$M = \begin{array}{cc} & \text{van} \begin{array}{ccc}\text{A} & \text{B} & \text{C}\end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c}\text{A}\\ \text{B}\\ \text{C}\end{array} & \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

Merk op dat deze matrix de “graaf” overbodig maakt.

2.1.4 Directe-wegenmatrix van *K*

De directe-wegenmatrix van K is de matrix met als elementen m_{ij} = aantal takken van A_i naar A_j (ook voor i=j). Voor het onderstaande voorbeeld geldt weer: $A_1 = \text{A}$, $A_2 = \text{B}$ en $A_3 = \text{C}$.

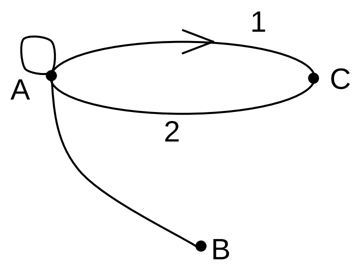


$$M = \begin{array}{cc} & \text{van} \begin{array}{ccc}\text{A} & \text{B} & \text{C}\end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c}\text{A}\\ \text{B}\\ \text{C}\end{array} & \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

Van A naar C zijn 2 wegen waarvan 1 met éénrichtingsverkeer!

* Met graaf bedoelen we een samenhangende graaf. Dit is een graaf waarbij het steeds mogelijk is tussen twee willekeurige knopen een pad te construeren.

2.1.5 2-stapsverbindingen



Weg 1 van A naar C is een éénrichtingsverbinding. Indien je van A naar C gaat via weg 1, moet je via weg 2 terug naar A.

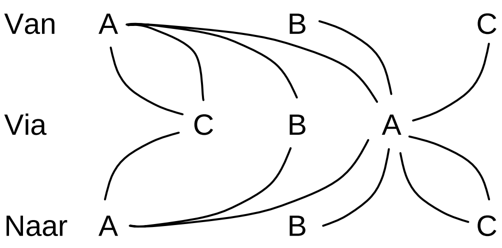
Opsomming van alle 2-stapsverbindingen:

$A \underset{2}{\to} C \underset{2}{\to} A$	$A \to B \to A$
$A \underset{1}{\to} C \underset{2}{\to} A$	$A \to A \to B$
$C \underset{2}{\to} A \underset{1}{\to} C$	$A \to A \to A$
$C \underset{2}{\to} A \underset{2}{\to} C$	$B \to A \to A$
$C \underset{2}{\to} A \to B$	$C \to A \to A$
$B \to A \underset{1}{\to} C$	$B \to A \to B$
$B \to A \underset{2}{\to} C$	$A \to A \underset{2}{\to} C$
	$A \to A \underset{1}{\to} C$

Dit geeft de volgende matrix:

$$\begin{array}{cc} & \text{van } \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

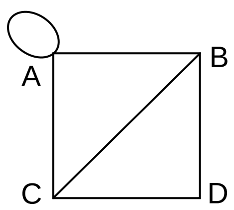
Voorstelling van de 2-stapsverbindingen met volgende graaf:



Bereken, met de grafische rekenmachine, $M \times M = M^2$. Wat stel je vast?

2.1.6 3-stapsverbindingen

De verbindingsmatrix van de hieronder afgebeelde graaf is:



$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

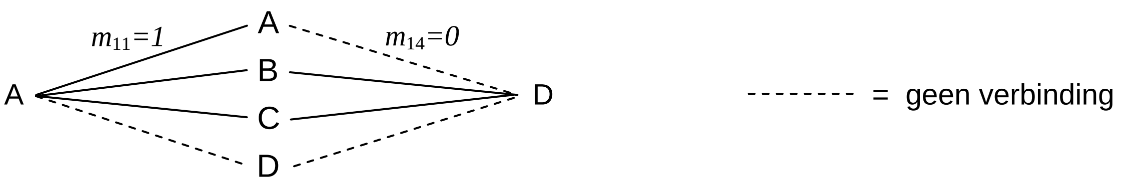
Als tweestapsverbindingen vinden we:

$$M^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = M.M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Door de keuze van de getallen 0 en 1 in de verbindingsmatrix zal een onmogelijke tweestapsroute minstens één factor 0 bevatten.

Neem bijvoorbeeld m_{14} van M^2, $m_{14} = 2$, het aantal tweestapsverbindingen van A naar D. Vermenigvuldiging van de 1^e^ rij van M met de 4^e^ kolom van M geeft m_{14} van M^2:

$1.0 + 1.1 + 1.1 + 0.0 = m_{11}\, m_{14} + m_{12}\, m_{24} + m_{13}\, m_{34} + m_{14}\, m_{44}$.



De 3-stapsverbindingen zijn:

$$M^3 = \text{van} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \quad M^3 = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 & 4 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 6 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

m_{14}=4 van M^3, de 3-stapsverbindingen van A naar D, is het product van de 1^e^ rij van M^2, de 2-stapsverbindingen van A naar A, B, C en D, met de 4^e^ kolom van M, de 1-stapsverbindingen van A, B, C en D naar D:

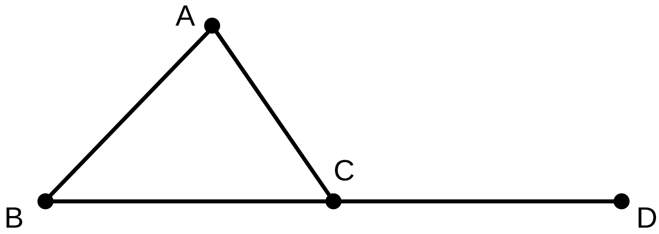
3.0+2.1+2.1+2.0=4 namelijk AAB-D, ACB-D, AAC-D, en ABC-D

<u>Algemeen</u>
Het element op de i^e^-rij en j^e^-kolom, m_{ij}, van M^k (met M de directe-wegenmatrix) is het aantal k-stapsverbindingen tussen A_i en A_j.

$M^0 + M^1$ geeft het aantal verbindingen bestaande uit <u>hoogstens</u> 1 stap,
$M^0 + M^1 + M^2$ het aantal verbindingen van <u>hoogstens</u> 2 stappen en
$M^0 + M^1 + M^2 + ... + M^k$ aantal verbindingen van <u>hoogstens</u> k stappen.

De som die geen enkele 0 meer bevat heet de oplossingsmatrix T^k waarbij k de **diameter** van de graaf is. Er zijn hoogstens k stappen nodig om gelijk welke twee plaatsen met elkaar te verbinden.

Oefening 1



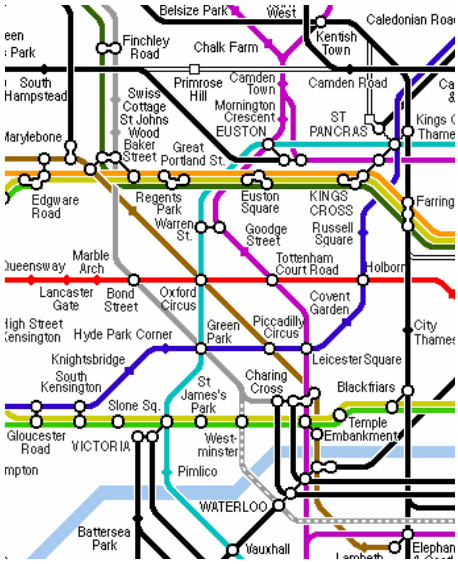
(i) Stel de verbindingsmatrix op.

(ii) Bereken met de grafische rekenmachine 2- en 3-stapsverbindingen.

(iii) Bepaal de diameter van de graaf.

Oefening 2

In onderstaande figuur vind je een deel van het *Underground*-netwerk in Londen.

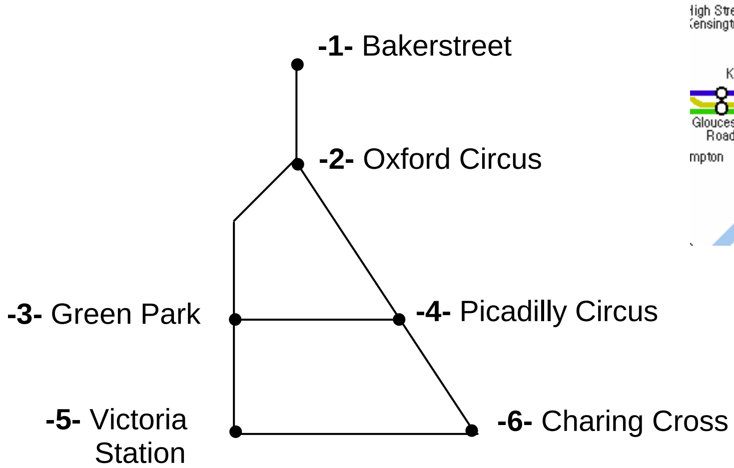


(i) Bepaal de verbindingsmatrix D.

(ii) Bereken $D^0 + D^1 + D^2$.

(iii) Bepaal de diameter van de graaf.

(iv) Bepaal het element t_{23} van de oplossingsmatrix.

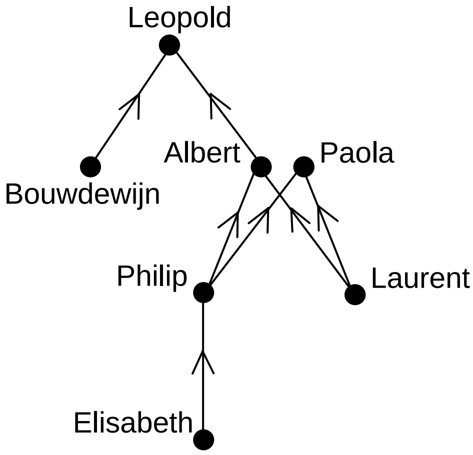


2.2 Matrices in sociale wetenschappen

2.2.1 Een fragment

"… *ze werden verwelkomd door Leopold, zijn zonen Albert en Boudewijn en zijn dochter Charlotte, Albert's vrouw Paola en hun zonen Philip en Laurent en Philip's dochter Elisabeth* … ."

Met de relatie "… is kind van …" maken we de volgende graaf:



De volgende matrix A, met nullen (… is geen kind van …) en enen (… is een kind van …), representeert deze graaf.

$$\text{naar}\quad \begin{array}{c} \\ L \\ A \\ B \\ P \\ Ph \\ La \\ E \end{array} \begin{array}{c} \text{Van} \\ \begin{array}{ccccccc} L & A & B & P & Ph & La & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

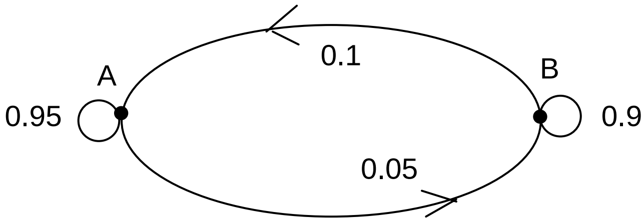
Bereken, met de grafische rekenmachine, A^2: "… is een kleinkind van …" en A^3: " … is achterkleinkind van …" .

2.2.2 Overgangsmatrix

Een **overgangsmatrix** is een matrix die hoort bij een graaf met 2 knopen waarin de overgangen "in een vaste periode" worden aangegeven.

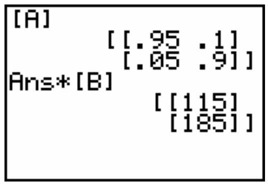
VOORBEELD 1

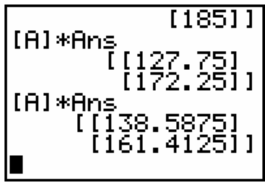
In een dorp zijn twee winkels A en B. Elke maand zijn er klanten van winkel A die de volgende maand naar winkel B gaan en andersom. De meeste klanten blijven gewoon bij hun oude winkel. Bij de opening van de winkels zijn er 100 klanten bij A en 200 klanten bij B.

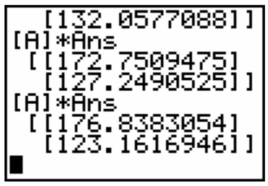


De overgangsmatrix is:
$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \end{array} & \begin{bmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{bmatrix} \end{array}$$

De elementen van de overgangsmatrix geven deovergangen aan. De som van de elementen van elke kolom is telkens 1.







Situatie na 1 periode (= 1 maand):

$$\begin{bmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \end{array} = \begin{bmatrix} 115 \\ 185 \end{bmatrix}$$

Situatie na 2 periodes (= 2 maand):

$$\begin{bmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 115 \\ 185 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128 \\ 172 \end{bmatrix}$$

Evolutie na enkele maanden:

$$\begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \end{array} \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 115 \\ 185 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 128 \\ 172 \end{bmatrix} \rightarrow \ldots\ldots \rightarrow \begin{bmatrix} 173 \\ 127 \end{bmatrix} \rightarrow \ldots \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Bij A is er elke maand een steeds kleinere toename, terwijl er bij B elke maand een steeds kleinere daling is. De toestand evolueert naar een **stabiele verdeling**.

VOORBEELD 2

In een ontwikkelingsland is er een wekelijks mededelingsprogramma voor landbouwers waarin een technologische evolutie wordt uiteengezet. deze landbouwers hebben onderling geen contact. De kans dat een landbouwer luistert is 20%. Op $t = 0$ weet geen enkele landbouwer iets van de innovatie.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{ gedeelte niet-weters } 100\,\% \\ \rightarrow \text{ gedeelte weters } \quad 0\% \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \text{van} \\ & \begin{array}{cc} \text{nw} & \text{w} \end{array} \\ \text{naar} \begin{array}{c} \text{nw} \\ \text{w} \end{array} & \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{niet-weters} \\ \text{weters} \end{array}$$

Na 1 week zijn er van de 100 niet-weters nog 80 niet-weters en de andere 20 zijn weters.
Hoe is de situatie na 5 weken?

$A^5 = \begin{bmatrix} 0.32768 & 0 \\ 0.67232 & 1 \end{bmatrix}$ Resulaat na 5 weken: A^5. $A^5 \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32.768 \\ 67.232 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{niet-weters} \\ \text{weters} \end{matrix}$

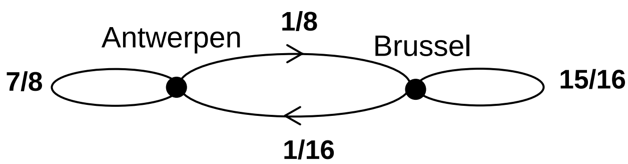
Hoe komt dat de groep van "weters" niet elke week met 20% toeneemt?

Nadat er 80% "weters" zijn, wordt een volgende innovatie gestart. Na hoeveel weken is dit?

2.3 Matrices in biologie of aardrijkskunde

2.3.1 Migratie

De migratie tussen Brussel en Antwerpen wordt als volgt schematisch weergegeven:



De bijhorende migratie-matrix is $A = \begin{bmatrix} 7/8 & 1/16 \\ 1/8 & 15/16 \end{bmatrix}$, in een tijdspanne van 5 jaar.

Bereken de bevolkingsaantallen van Brussel en Antwerpen na 5 en 20 jaar als de beginsituatie gegeven is door de matrix $B = \begin{bmatrix} 800\,000 \\ 1200\,000 \end{bmatrix}$

OEFENING

Bereken de bevolkingsaantallen van Brussel, Mechelen en Antwerpen binnen 9 jaar als de volgende migratie-matrix geldt voor een periode van 3 jaar, dit uitgaande van de bevolkingsaantallen (in duizendtallen): Antwerpen – 55, Mechelen – 98, Brussel – 112.

$$M = \text{naar} \begin{array}{r} \\ \text{Antwerpen} \\ \text{Mechelen} \\ \text{Brussel} \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccc} \text{Ant} & \text{Mech} & \text{Bru} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3/5 & 1/10 & 1/10 \\ 1/5 & 4/5 & 3/10 \\ 1/5 & 1/10 & 3/5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Herschrijf de migratie-matrix als volgt: $\text{van} \begin{array}{c} \text{naar} \\ \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/10 & 4/5 & 3/10 \\ 1/10 & 1/10 & 3/5 \end{bmatrix} \end{array}$

Wat is de relatie tussen M en deze matrix?

Gebruik deze laatste matrix om je antwoord te bekomen.

Een matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ noemen we de getransponeerde matrix van $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ als $\forall\, i \in \{1,...,n\}$ en $\forall\, j \in \{1,...,m\}$ geldt dat $b_{ij} = a_{ji}$. B noteren we als A^T.

Waaraan denk je dat de getransponeerde van het product van twee matrices gelijk is?
$(P\cdot Q)^T =$......................

2.3.2 Populatie-voorspellingsmatrix of Lesliematrix

Bij een kever-populatie geldt dat

- 50% meer dan 1 jaar wordt,
- 1/3 meer dan 2 jaar en
- geen enkele kever wordt 3 jaar

2-jarige kevers brengen gemiddeld 6 nakomelingen voort. Vertrekkende van 3000 kevers waarbij er 1000 kevers per groep (I: 0-1jaar, II: 1-2 jaar, III: > 2 jaar) zijn, kan het volgend produkt worden opgesteld:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \end{array} . \begin{bmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

Gebruik van insecticides dringt de vruchtbaarheid terug van 6 tot 3. Bepaal hiervan de invloed.

Hoe stel je een Lesliematrix op voor *n* groepen?

<u>1^e rij</u>: vruchtbaarheid van elke groep

<u>2^e rij</u>: 1^e kolom = overlevingskans, promotiekans voor volgende groep
en alle andere elementen nul

<u>3^e rij</u>: 2^e kolom = kans om van 2^e naar 3^e groep te gaan
en alle andere elementen nul.

<u>4^e rij</u>: 3^e kolom = kans om van 3^e naar 4^e groep te gaan
en alle andere elementen nul.

$\vdots$

$$A = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & \dots & v_{n-1} & v_n \\ p_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

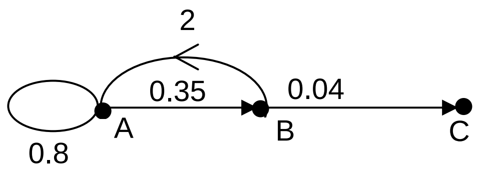
OEFENINGEN

a. Een populatie bestaat uit leeftijdsklassen van 15 dagen. Geen enkel individu wordt 90 dagen. Voortplanting is er tussen de 30ste en 75ste levensdag $(v_0 = v_1 = v_5 = 0)$ met $v_2 = 4$, $v_3 = 10$ en $v_4 = 4$. De eerste 15 dagen sterft 50% van de dieren, 75% gaat van de 2e naar de 3e groep en eveneens 75% gaat van de 3e naar de 4e groep. Slechts 33% gaat van de 4e naar de 5e groep en tenslotte gaat er 25% van de 5e naar de 6e groep.

   Bepaal de Lesliematrix.

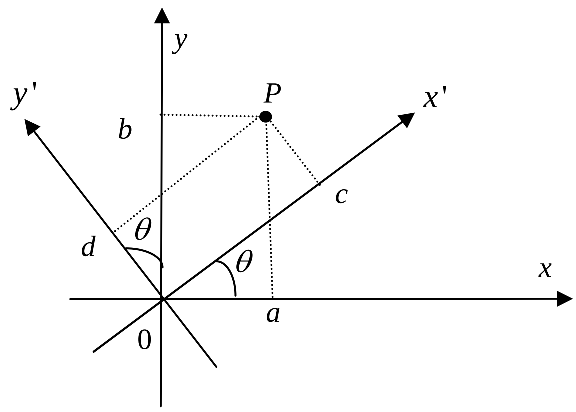
b. Voor drie even grote groepen van 1000 (jongeren, volwassenen, ouderen) gelden volgende regels: $v_0 = 0{,}1$, $v_1 = 0{,}5$, $v_2 = 0{,}01$ en $p_0 = 0.5$, $p_1 = 0.25$.
   Hoe evolueert deze populatie in de eerste 4 jaren? Hoe is de verdeling na 10 jaar?

c. In een populatie kunnen 3 generaties onderscheiden worden. De periode van de graaf is de lengte van 1 generatie. Stel de populatievoorspellingsmatrix of Lesliematrix op en bepaal het aantal van elke generatie na 5 periodes. De beginsituatie is 100, 60, 50.



2.4 Matrices en lineaire transformaties in het vlak

Uitgewerkt voorbeeld van een rotatie (= draaiing) met centrum 0 en hoek θ .



Zij $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ de orthonormale basis van $x0y$ en $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ een orthonormale basis van $x'0y'$.
(a,b) zijn de coördinaten van P t.o.v. $x0y$ en (c,d) t.o.v. $x'0y'$.

Daar $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = -\sin\theta$ en $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$ geldt:

$$\vec{e}_1' = \cos\theta \cdot \vec{e}_1 + \sin\theta \cdot \vec{e}_2 \quad \text{en} \quad \vec{e}_2' = -\sin\theta \cdot \vec{e}_1 + \cos\theta \cdot \vec{e}_2$$

Dit geeft de volgende overgangsmatrix: $S = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Voor P geldt dat $P = a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2$.   (1)

Anderzijds geldt dat:

$$\begin{aligned} P &= c \cdot \vec{e}_1\,' + d \cdot \vec{e}_2\,' \\ &= c \cdot (\cos\theta \cdot \vec{e}_1 + \sin\theta \cdot \vec{e}_2) + d \cdot (-\sin\theta \cdot \vec{e}_1 + \cos\theta \cdot \vec{e}_2) \\ &= (c \cdot \cos\theta - d \cdot \sin\theta) \cdot \vec{e}_1 + (c \cdot \sin\theta + d \cdot \cos\theta) \cdot \vec{e}_2 \qquad (2) \end{aligned}$$

Uit (1) en (2) volgt dat $a = c \cdot \cos\theta - d \cdot \sin\theta$ en $b = c \cdot \sin\theta + d \cdot \cos\theta$.

In matrixnotatie geeft dit $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$.

En na links vermenigvuldigen met S^{-1}: $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

- Verklaar waarom S een inverse heeft en bereken de inverse.
- Stel de matrix op van een spiegeling t.o.v. de x-as.
- Bepaal de matrix na 2 opeenvolgende rotaties over θ.