

Appendix B: Complexe getallen met Cabri Geometry II¹

1. Macro's in Cabri

Indien een constructie geregeld uitgevoerd moet worden, is het interessant deze constructie op te slaan in een macro.

Het definiëren van een macro verloopt telkens in de volgende stappen:

(i) Het ingeven van de beginobjecten

Dit zijn de onafhankelijke objecten waarop de constructie gebaseerd is.

(ii) Het ingeven van de eindobjecten

Dit zijn de resultaten van de constructie.

(iii) Het definiëren van de macro

In deze stap kan je de volgende gegevens van de macro ingeven:

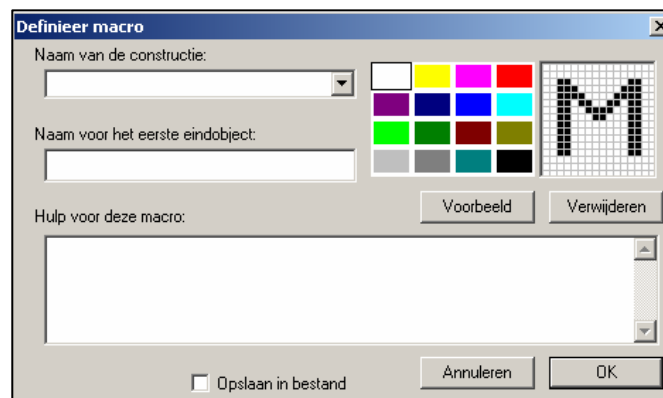
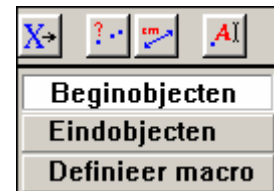
naam en icon

naam eerste eindobject

Deze naam zal verschijnen als je dit eindobject aanduidt met de cursor.

hulp

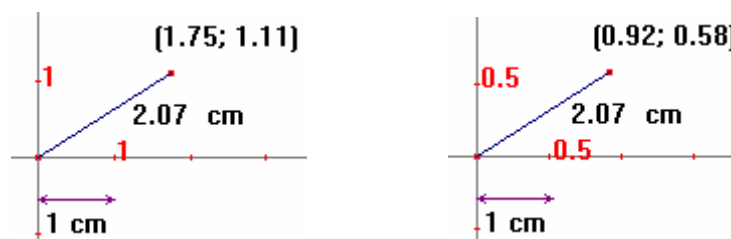
Hier kan je de tekst intikken die je wenst te laten verschijnen bij het indrukken van **F1** – het oproepen van de helpfunctie.



2. Cabri en coördinaten

Toon het standaard assenstelsel en plaats de oorsprong centraal op het tekenblad. Teken een willekeurig punt, bepaal de coördinaten van dit punt en bepaal de afstand tot de oorsprong.

Verplaats de eenheid van de x-as en bekijk wat de gevolgen zijn voor de coördinaten en de afstand.

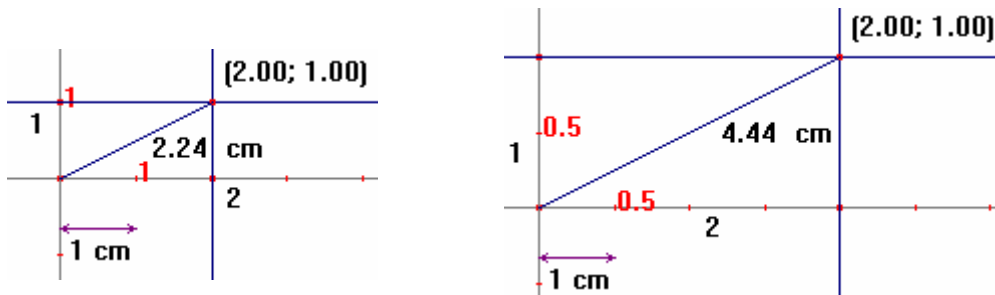


¹ Gebaseerd op Cabri-werkbladen van Dick Klingens: www.pandd.demon.nl.


Het bepalen van een punt met bv. als coördinaten (2,1) gaat als volgt (creëer eerst een nieuw tekenblad).

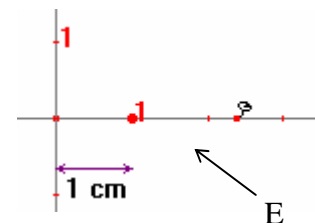
Plaats de getallen 2 en 1 op het tekenblad. Breng de maat 2 over op de x-as en teken door het bekomen punt een loodlijn op de x-as.

Doe hetzelfde voor het maatgetal 1 en de y-as en bepaal het snijpunt van de twee loodlijnen. Verplaats ook nu de eenheid van de x-as.



Om correcte resultaten te bekomen bij zowel het rekenen met coördinaten als bij het rekenen met lengtes voeren we de volgende stappen uit:

- Neem een nieuw tekenblad.
- Toon het assenstelsel en plaats de oorsprong centraal.
- Plaats het getal 1 op het tekenblad en breng deze maat over op de x-as. Dit punt noemen we in wat volgt de eenheid. We noteren dit punt met E.
- Plaats een willekeurig punt op de x-as en fixeer dit -  .
- Verberg het getal 1.



We hebben nu een orthonormaal assenstelsel met als eenheid 1 cm. Bewaar deze tekening in *Orthonormaal.fig*.

3. De som van twee complexe getallen

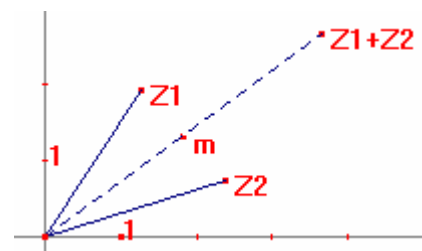
Constructie

Teken, in *Orthonormaal.fig*, twee complexe getallen Z_1 en Z_2 .

Bepaal het midden, m , van Z_1 en Z_2 .

Spiegel de oorsprong om het midden m .

Dit punt is de som van Z_1 en Z_2 .



Definitie van de macro

BEGINOBJECTEN

Selecteer als beginobjecten het assenstelsel en de punten Z_1 en Z_2 .

EINDOBJECTEN

Selecteer het punt Z_1+Z_2 als eindobject.

DEFINIEER MACRO

Vul het *Definieer Macro*-Venster als volgt in :

Naam: Complexe som

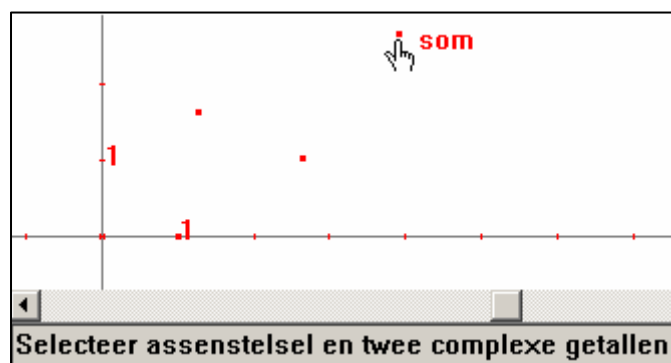
Naam eindobject: Som

Hulp: Selecteer assenstelsel en twee complexe getallen

Zet de optie *Opslaan in bestand* aan, maak eventueel een icon aan en klik op OK.

De macro wordt opgeslaan in *Complexe_Som.mac* en automatisch toegevoegd aan het *Macro*-menu.

Het uitvoeren van de macro doe je door eerst de macro *Complexe Som* te selecteren in het *macro*-menu. Dan selecteer je het assenstelsel en de twee complexe getallen. De macro genereert de som als resultaat.



Om deze macro later opnieuw te gebruiken, moet je gewoon het bestand *Complexe_Som.mac* openen.

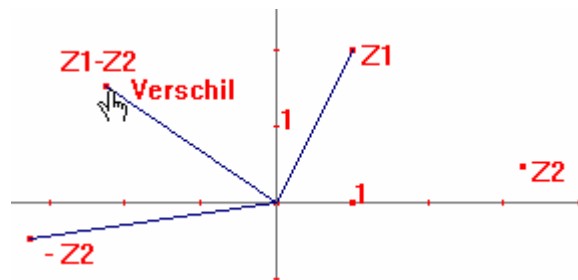
De ingevoerde karakteristieken van de macro (o.a. naam, icon, naam eerste eindobject en hulp) kunnen geëditeerd worden door het *mac*-bestand te openen met b.v. Notepad.

De macro *Complexe Som* ziet er als volgt uit:

```
MACRO CabriII vers. MS-Windows 1.0
Complexe Som, Som
Icon:
0000000000000000
0000000000000000
00000000FF000000
00000000FF000000
00000000FF000000
00000000FF000000
00000000FF000000
00000000FF000000
00FFFFFF00000000
00FFFFFF00000000
00000000FF000000
00000000FF000000
00000000FF000000
00000000FF000000
0000000000000000
0000000000000000
Help:
"Selecteer assenstelsel en twee complexe getallen"
Mth: 0
CN:3, ON:2, FN:1, PO:1
CT:
coordinate system, CS 1, Gr, W, t, DS:1 1, GT:0, U, nSt
point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, U, nSt
point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, U, nSt
Const:
Mid, Mth:0, 0, 0, CN:2, UN:1, Const: 4 3
Sym, Mth:0, 1, 0, CN:2, UN:1, Const: 1 5, R, W, t, DS:1 1, GT:1, U, nSt
```

4. Het verschil van twee complexe getallen

Daar $Z_1 - Z_2$ gelijk is aan $Z_1 + (-Z_2)$ is het voldoende voor het uitvoeren van het verschil Z_2 te spiegelen om de oorsprong en op dit punt, $-Z_2$, en Z_1 de macro Complexe Som uit te voeren.



Definieer op een analoge manier de macro Complex Verschil.

5. Het product van twee complexe getallen

Om het product van twee complexe getallen te construeren gebruiken we de goniometrische voorstelling van een complex getal.

Er geldt dat de modulus van het product gelijk is aan het product van de moduli en het argument van het product de som van de argumenten.

Constructie

De modulus van het product

Construeer de cirkel met middelpunt de oorsprong en als straal $|Z_1|$.

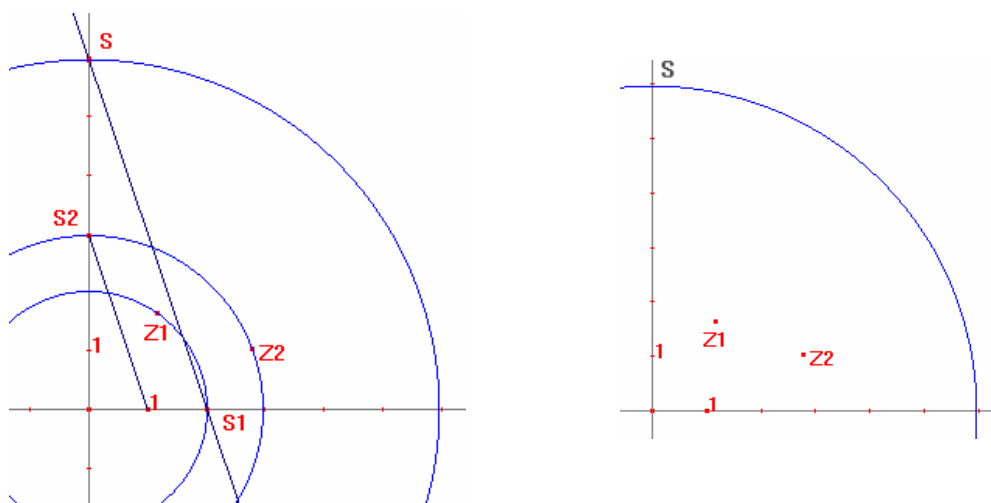
Bepaal het snijpunt, S_1 - met positieve x-coördinaat, van deze cirkel met de x-as.

Bepaal het snijpunt, S_2 - met positieve y-coördinaat, van de cirkel met als middelpunt de oorsprong en als straal $|Z_2|$.

Construeer het lijnstuk tussen de punten S_2 en de eenheid en een evenwijdige met dit lijnstuk door het punt S_1 .

Volgens de stelling van Thales ligt het snijpunt S van deze evenwijdige op een afstand $|Z_1| \cdot |Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$ van de oorsprong.

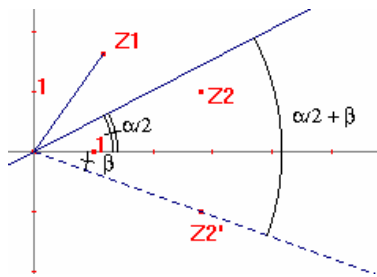
Construeer een cirkel met middelpunt de oorsprong en als straal $|S|$ en verberg alle eerder uitgevoerde constructies.



Het argument van het product

Spiegel het Z_2 om de x-as. Noem dit punt Z_2' .

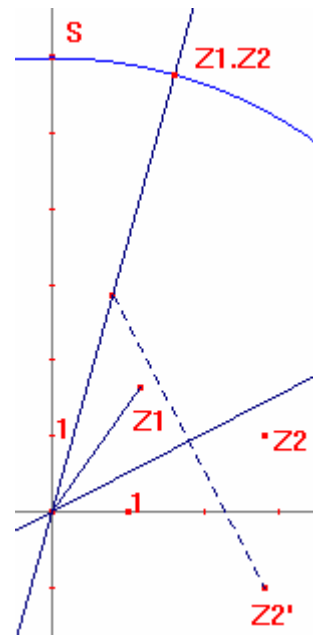
Bepaal de deellijn van de hoek $\angle Z_1OE$.



Spiegel het punt Z_2' om de geconstrueerde deellijn.

Construeer een rechte door dit punt en de oorsprong.

Het snijpunt van deze rechte met de cirkel met als straal $|S|$ is het product van Z_1 en Z_2



Definitie van de macro

Definieer de macro Complex Product met als karakteristieken:

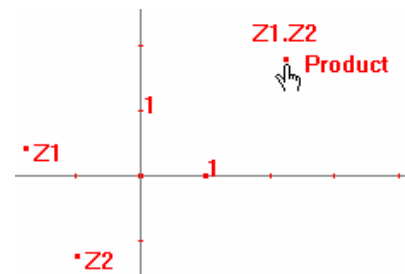
Beginobjecten → assenstelsel, eenheid en Z_1 en Z_2

Eindobjecten → het punt $Z_1.Z_2$

Naam → Complex Product

Naam eindobject → Product

Hulp → Selecteer assenstelsel, eenheid en twee complexe getallen



**!!! Voor het uitvoeren van de macro selecteer eerst de eenheid !!!
en dan de twee complexe getallen.**

6. Invers van een complex getal

Constructie

Construeer een cirkel met als middelpunt de oorsprong en als straal de eenheid.

Bepaal een complex getal Z_1 en de inversie van Z_1 t.o.v. de eenheidscirkel.

Spiegel dit punt om de x-as. Het resultaat is $1/Z_1$.

Definitie van de macro

Definieer de macro Complex Invers met als karakteristieken:

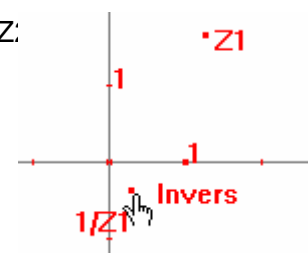
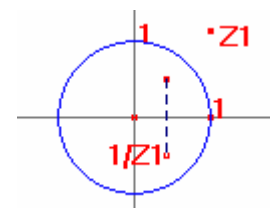
Beginobjecten → assenstelsel, oorsprong, eenheid en Z_1 en Z_2

Eindobjecten → het punt $1/Z_1$

Naam → Complex Invers

Naam eindobject → Invers

Hulp → Selecteer assenstelsel, oorsprong, eenheid en een complex getal

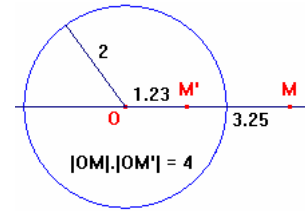


**!!! Voor het uitvoeren van de macro selecteer eerst de oorsprong, !!!
dan de eenheid en dan de twee complexe getallen.**

Intermezzo

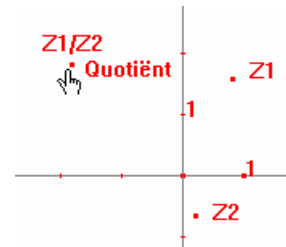
De transformatie *Inversie* construeert voor een punt M t.o.v. een cirkel met middelpunt O en straal r een punt M' dat voldoet aan:

- (i) M' ligt op de rechte OM,
- (ii) $|OM| \cdot |OM'| = r^2$.



7. Quotiënt van twee complexe getallen

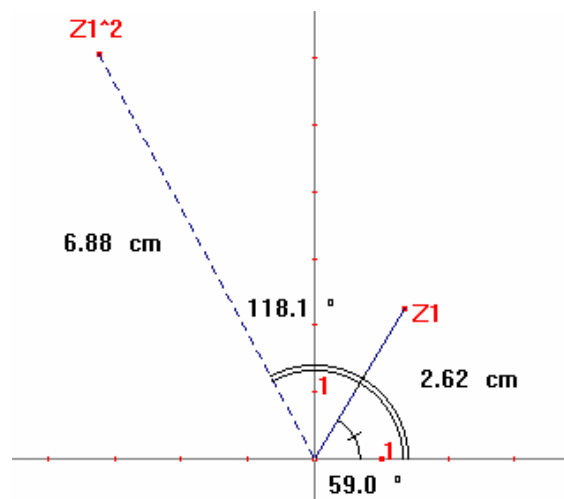
Gebruik de macro's Complex Product en Complex Invers om een macro te definiëren die het quotiënt van twee complexe getallen construeert.



8. De Mandelbrot-verzameling

8.1 Het kwadraat van een complex kwadraat

Met de macro Complex Product kan je niet het kwadraat berekenen van een complex getal. Construeer op een analoge manier als bij het product de macro Complex Kwadraat.



8.2 De Mandelbrot-verzameling

Voor het construeren van de Mandelbrot-verzameling bestuderen we de baan van 0 voor iedere complexe functie $F(z) = z^2 + c$ ($c \in \mathbb{C}$).

$$0 \rightarrow c \rightarrow (c)^2 + c \rightarrow (c^2 + c)^2 + c \rightarrow \dots \text{ of } c \rightarrow (c)^2 + c \rightarrow (c^2 + c)^2 + c \rightarrow \dots$$

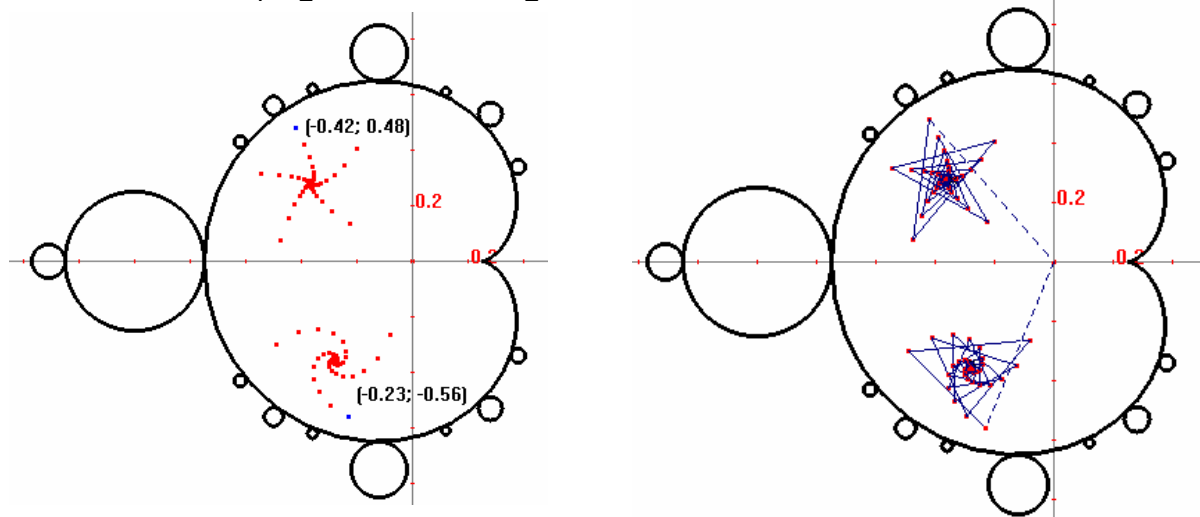
Het uitvoeren van de iteratie is niets anders dan het kwadrateren van een complex getal en hierbij telkens het getal c op te tellen. Definieer een macro die voor iedere $c \in \mathbb{C}$ een tiental stappen construeert van de baan van 0. Hieronder vind je het resultaat van enkele iteraties.



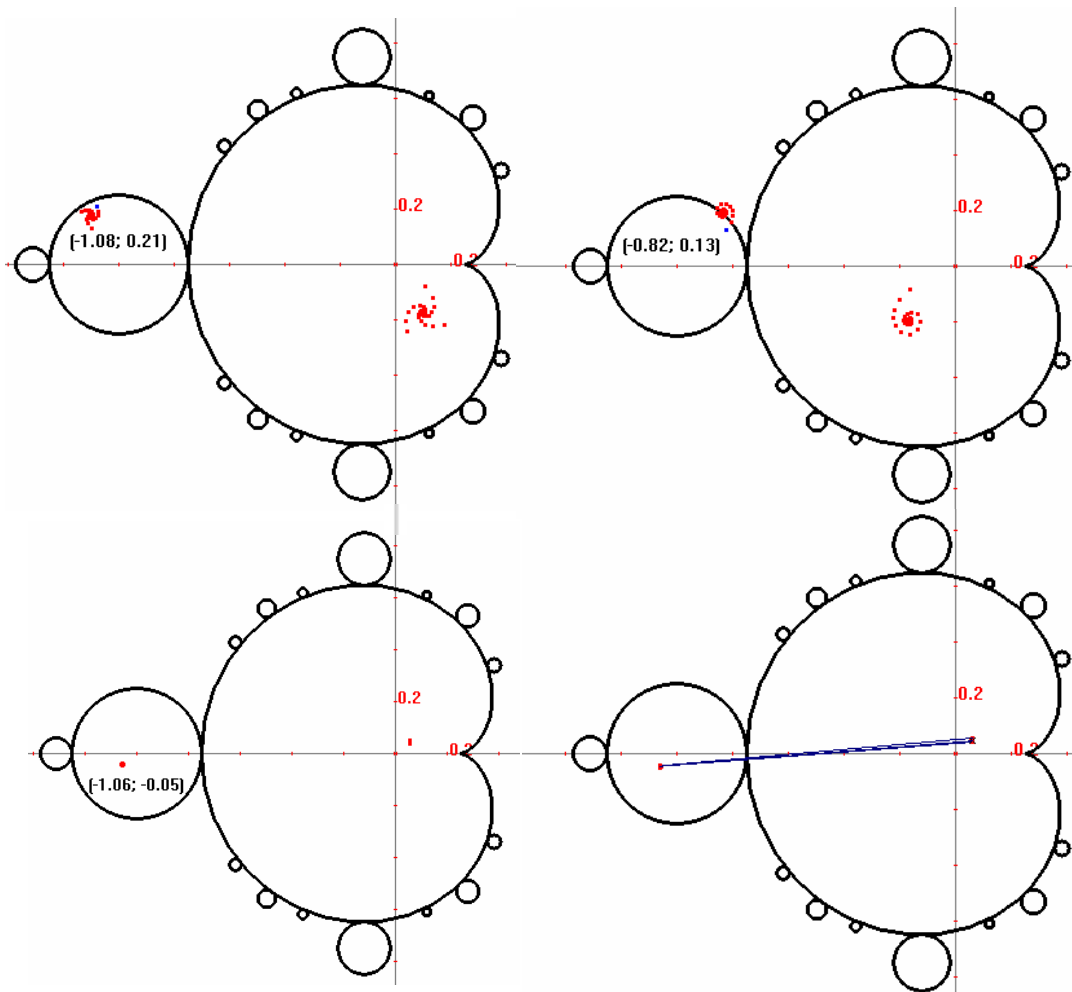
De Mandelbrot-verzameling ligt in de cirkel met middelpunt de oorsprong en straal 2.

Men kan bewijzen dat de complexe getallen waarvoor de baan naar één punt convergeert zich bevindt binnen de cardioïde met als vergelijking:

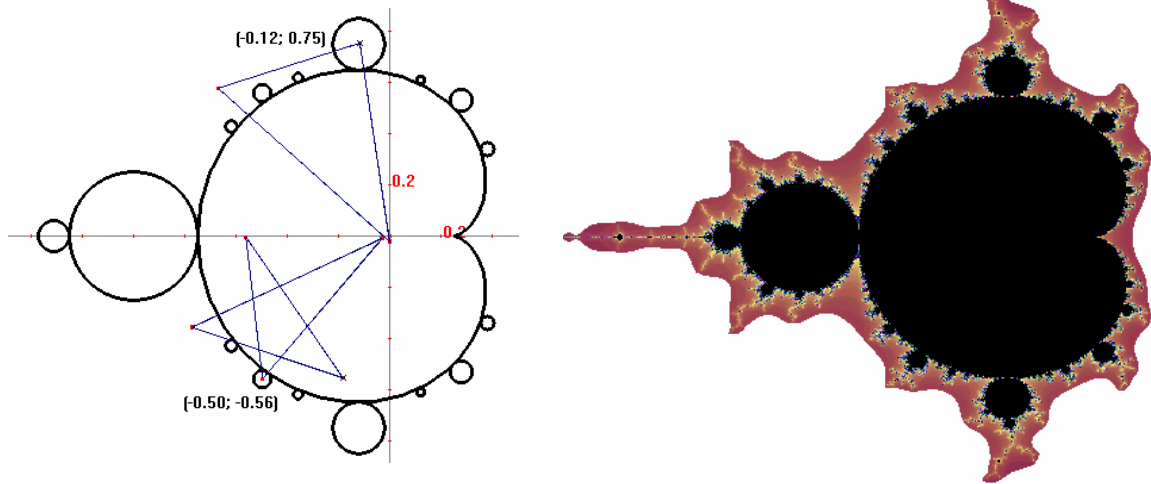
$$\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos \theta (\cos \theta - 1), \frac{1}{2} \sin \theta (1 - \cos \theta)\right] \text{ met } \theta \in [0, 2\pi].$$



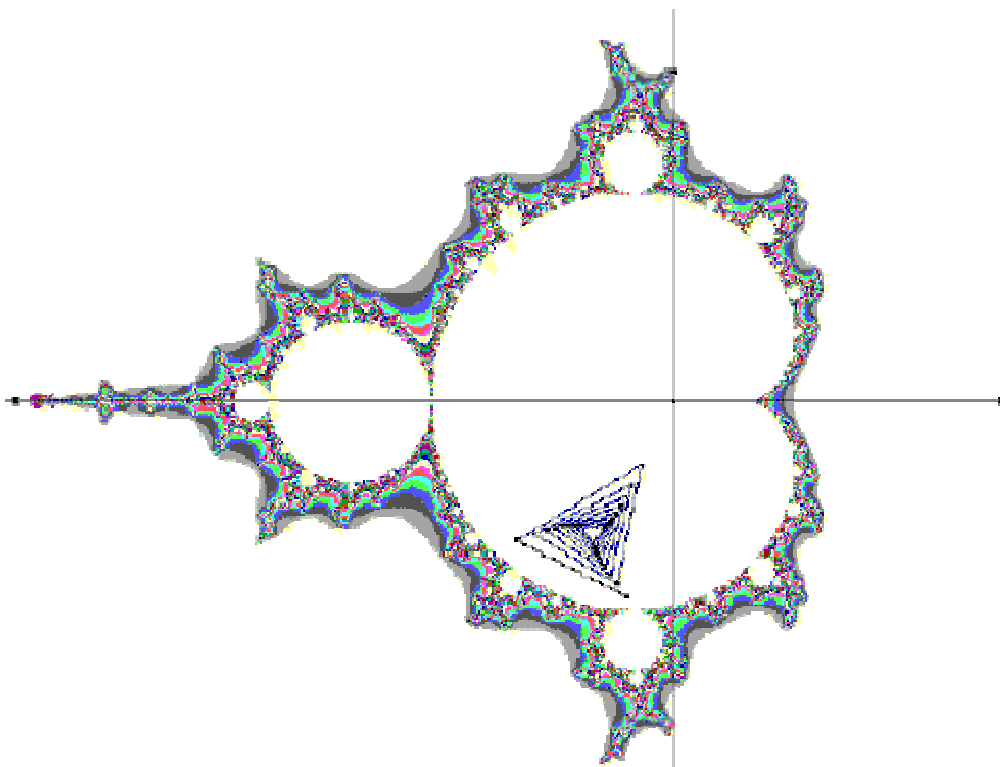
Complexe getallen waarvoor de baan wordt aangetrokken naar een 2-cyclus (een baan met periode 2) liggen in de cirkel met middelpunt $c = -1$ en straal 0.25.



Men kan nagaan dat met iedere bol die aan de centrale cardioïde gehecht is een n -cyclus geassocieerd kan worden.



Met Cabri Geometry II Plus kan de Mandelbrot-verzameling als figuur op de achtergrond geplaatst worden.



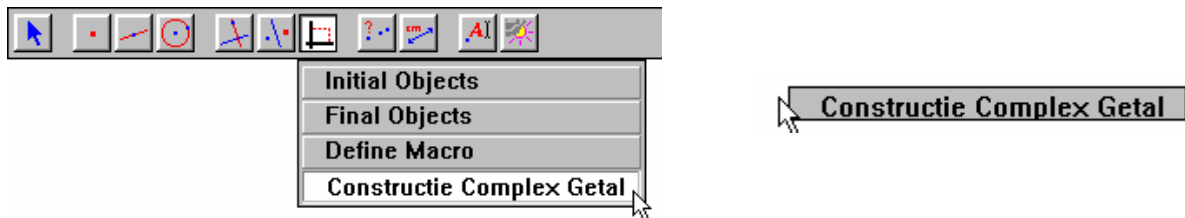
9. Menu's

Gemaakte macro's komen automatisch terecht in het macro-menu.

Met *Werkbalk-instellingen* uit het *Opties*-menu kan je de werkbalk organiseren zoals je dit zelf wil.



Sleep hiervoor een item uit de werkbalk - linkermuisknop ingedrukt houden en loslaten als de cursor zich buiten het menu bevindt.



Klik dan op het menu waar je het item wil plaatsen of op een lege plek op de werkbalk als je een nieuw menu wil creëren. Klikken in het werkblad verwijdert het item van de werkbalk.



Klik dan op OK. Om de werkbalk te bewaren zet je *Opslaan in bestand* aan.