Dynamische processen
Zelfstudieopdracht 8

Chloor in een zwembad

In een zwembad is er $1000\ m^3$ water met een chloorconcentratie dat twee keer te hoog is en dit 12 uur vóór de start van een zwemkampioenschap.

De concentratie van chloor halveren kan door $500\ m^3$ chloorwater te laten wegstromen met een snelheid van $1\frac{m^3}{\min}$, de maximale uitstroomsnelheid van het zwembad. Dit duurt 500 minuten en het daarna laten instromen van $500\ m^3$ zuiver water met eenzelfde snelheid van $1\frac{m^3}{\min}$ ook 500 minuten, m.a.w. een totaal van 1000 minuten = 16u 40min.

Maar er is maar 12 uur tijd.

Een oplossing voor dit probleem bestaat erin om chloorwater te laten uitstromen en <u>tegelijkertijd</u> zuiver water te laten instromen. De concentratie van het chloorwater, $H(t)$, verandert continu.

Veronderstel dat:

- het zuiver water goed en snel vermengd wordt zodat de concentratie overal nagenoeg hetzelfde is en
- er in het begin $1\frac{l}{m^3}$ chloor in het zwembad is: $H(0) = 1000\ l$.

1. <u>Discreet dynamisch proces</u>

<u>1e benadering</u>
We meten elk uur de concentratie van het chloorwater. Vermits de chloorconcentratie elk ogenblik verandert, is deze benadering heel ruw.

- Het 1e uur verdwijnt $60\ m^3$ chloorwater en stroomt $60\ m^3$ zuiver water binnen. Er is dus na 1u nog $1000\ l - \frac{60}{1000}.1000\ l$ = $1000.(1-\frac{60}{1000}) = 940\ l$ chloor en de chloorconcentratie is $\frac{940}{1000}\frac{l}{m^3}$.

- Het 2e uur verdwijnt $60\ m^3$ chloorwater (met andere concentratie) en stroomt $60\ m^3$ zuiver water binnen. Er is nog $940\ l - \frac{60}{1000}.940\ l = 883,6\ l$ chloor aanwezig: $883,6 = 940.(1-\frac{60}{1000}) = 1000.(1-\frac{60}{1000}).(1-\frac{60}{1000}) = 1000.(1-\frac{60}{1000})^2$.

- Het 3^e uur is er nog

  $$883,6\,l-\frac{60}{1000}.883,6\,l=883,6\,l.(1-\frac{60}{1000})=1000.(1-\frac{60}{1000})^3 l=830,584\,l$$

  chloor aanwezig.

- ………

- Dit geeft een recursieve vergelijking met stapgrootte van 1u, $H(t)=0,94H(t-1)$,
  met als expliciet voorschrift: $H(t)=0,94^t\,H(0)$ en als differentievergelijking
  $\Delta H(t)=H(t+1)-H(t)=0,94H(t)-H(t)=-0,06H(t)$.

- De hoeveelheid chloor is gehalveerd als

  $$H(t)=\frac{H(0)}{2}=H(0)\ 0,94^t \Rightarrow t={}^{0,94}\log 0,5=11,2u\ .$$

<u>2^e benadering</u>: we meten de chloorconcentratie elke 30 minuten.

Opgave 1
Bepaal, naar analogie met de 1^e benadering, de differentievergelijking van het discreet dynamisch proces met tijdstappen van 30 min. In dit geval is de stapgrootte 1 gelijk aan 30 minuten.

Wanneer is de hoeveelheid chloor gehalveerd? ($11,378...u$)

Opgave 2
Bepaal de differentievergelijking van het discreet dynamisch proces met tijdstappen van 1 minuut. In dit geval is de stapgrootte 1 gelijk aan 1 minuut.

Wanneer is nu de hoeveelheid chloor gehalveerd? ($11,547...u$)

2. <u>Continu dynamisch proces</u>

Voer de vorige opgaven uit voor een stapgrootte van Δt minuten.

- $H(t)$ is het aantal liter chloor in het zwembad ($1000\ m^3$ chloorwater) op het ogenblik t.

  Op 1 min stroomt $1\,m^3$ chloorwater weg en stroomt $1\,m^3$ zuiver water in.

  Op 1 min stroomt dus $\frac{1}{1000}H(t)\,[l]$ chloor weg.

  Op Δt min stroomt $\frac{\Delta t}{1000}H(t)\,[l]$ chloor weg.

  $$H(t+\Delta t)=H(t)-\frac{\Delta t}{1000}H(t)$$

  $$\Delta H(t)=H(t+\Delta t)-H(t)=-\frac{\Delta t}{1000}H(t)$$

- We leiden nu de differentiaalvergelijking af: $H'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{H(t+\Delta t) - H(t)}{\Delta t}$.

  Voor Δt klein genoeg geldt dat $H'(t) \approx \dfrac{H(t+\Delta t) - H(t)}{\Delta t} = \dfrac{-1}{1000} H(t)$.

  De oplossing van deze D.V. is $H(t) = 1000 e^{-0{,}001\, t}$ (zelfstudieopdracht 7.4).

Opgave 3

a. Bereken met je grafische rekenmachine $H(10)$ en vergelijk je resultaat met de oplossing van de differentievergelijkingen na t = 10 min.

b. Maak een tijdgrafiek van de oplossing van de differentievergelijkingen en van de oplossing van de differentiaalvergelijking.

c. Bereken de halveringstijd van het continu proces en vergelijk met de halveringstijd van het discreet proces met tijdstappen van 1 minuut.