1 Tweedimensionale Euclidische ruimte

1.1 Optelling, verschil en scalaire vermenigvuldiging

$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) | a,b \in \mathbb{R}\}$ is de verzameling van alle koppels reële getallen.

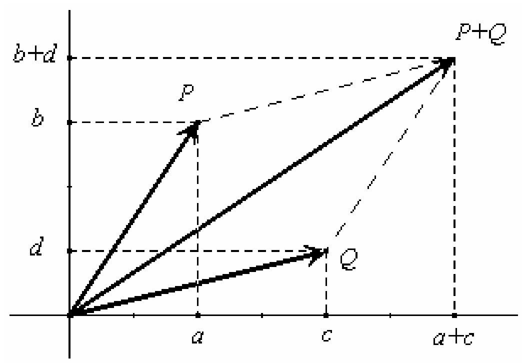
Zoals we ons de reële getallen kunnen voorstellen als de punten van een lijn waarop 0 en 1 zijn vastgelegd, zo kunnen we ons de paren reële getallen voorstellen als punten van een vlak waarin een rechthoekig assenstelsel is gekozen.
In $\mathbb{R}^2$ wordt de optelling, het verschil en de scalaire vermenigvuldiging als volgt gedefiniëerd:

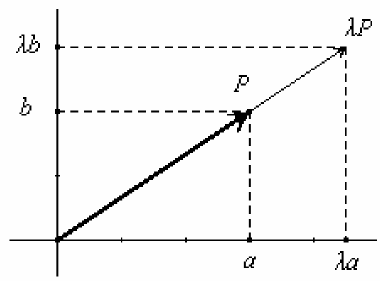
$$\forall a,b \in \mathbb{R}: (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$\forall a,b \in \mathbb{R}: (a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$$
$$\forall a,b,\lambda \in \mathbb{R}: \lambda.(a,b)=(\lambda a,\lambda b)$$

Elk paar (a,b) bepaalt één punt P in het vlak en P kan je beschouwen als het eindpunt van de vector $\overrightarrow{OP}=\vec{P}$.

Een som van twee koppels is als een som van twee vectoren $\overrightarrow{OP}$ en $\overrightarrow{OQ}$ die bepaald wordt met een parallellogramconstructie, waarbij de twee vectoren de zijden zijn en de diagonaal de somvector is.

$\lambda(a,b)=(\lambda a,\lambda b)$ is het koppel dat overeenkomt met het eindpunt van $\lambda.\overrightarrow{OP}$.





1.2 Vermenigvuldiging

We definiëren in $\mathbb{R}^2$ een distributieve vermenigvuldiging met als doel eigenschappen zoals commutativiteit, associativiteit,…... die gelden in $\mathbb{R}$ te behouden.

Later in dit hoofdstuk wordt deze definitie duidelijk!

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}: (a,b).(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

1.3 Eigenschappen

<u>Is er een eenheidselement voor deze vermenigvuldiging?</u>

$\forall a,b,x,y \in \mathbb{R}:$

$$(a,b).(x,y)=(a,b)=(x,y).(a,b) \overset{\text{definitie}}{\Leftrightarrow} (ax-by,bx+ay)=(a,b) \overset{\text{gelijkheid koppels}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} ax-by=a \\ bx+ay=b \end{cases}$$

Het oplossen van dit stelsel met de methode van Gauss geeft:

$$\begin{bmatrix} a & -b & | & a \\ b & a & | & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

BESLUIT

Voor elk element van $\mathbb{R}^2$ is (1,0) het eenheidselement.

<u>Is er een invers element voor de vermenigvulding?</u>

$$\forall\, a,b,x,y \in \mathbb{R}:$$

$$(a,b).(x,y) = (1,0) = (x,y).(a,b) \overset{\text{definitie}}{\Leftrightarrow} (ax-by, bx+ay) = (1,0) \overset{\text{gelijkheid koppels}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Oplossen met Gauss-Jordan geeft:

(i) $a \neq 0$ of $b \neq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \neq 0$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{a}{a^2+b^2} \\ 0 & 1 & \dfrac{-b}{a^2+b^2} \end{bmatrix}$.

(ii) $a = 0$ en $b = 0$: in dit geval heeft het stelsel geen oplossingen.

BESLUIT

In $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ heeft elk element een invert element nl. $(a,b)^{-1} = (\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2})$.

1.4 Een bijzondere deelverzameling van $\mathbb{R}^2$

Beschouw de verzameling $\{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Er geldt voor

de optelling: $(a,0) + (b,0) = (a+b,0)$,

de scalaire vermenigvuldiging: $\lambda.(a,0) = (\lambda a, 0)$ en

de vermenigvuldiging: $(a,0).(b,0) = (ab - 0.0, a.0 + 0.b) = (ab,0)$.

De optelling, de scalaire vermenigvuldiging en de vermenigvuldiging van koppels $(a,0)$ verloopt analoog als met reële getallen. We identificeren daarom deze koppels met de reële getallen: $\forall\, a \in \mathbb{R} : a \equiv (a,0)$.

2 Definitie van complexe getallen

Pas vanaf 1800 werd door de Ierse wiskundige Hamilton het rekenen met complexe getallen tot een volledig algebraïsch systeem opgezet door ze als koppels reële getallen op te vatten.

2.1 En wat met de vergelijking $x^2 = -1$?

Het oplossen van deze vergelijking in $\mathbb{R}$, $x = \pm\sqrt{-1}$, is absurd. We kennen geen enkel getal waarvan het kwadraat negatief is.

En als we nu rekenen met koppels?

Is er een koppel, (a,b), waarvan het kwadraat gelijk is aan $(-1,0)$?

$$(a,b).(a,b) = (-1,0) \overset{\text{definitie}}{\Leftrightarrow} (a^2 - b^2, 2ab) = (-1,0) \overset{\text{gelijkheid koppels}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ 2ab = 0 \end{cases}$$

Dit stelsel heeft enkel oplossingen indien $a = 0$ en $b \neq 0$ nl. $b = -1$ of $b = 1$.

Het probleem $x^2 = -1$ is oplosbaar als de onbekende x een koppel is en als we -1 identificeren met het koppel $(-1,0)$.

$$x^2 = -1 \Leftrightarrow x = (0,1) \text{ of } x = (0,-1) = -(0,1)$$

Naar analogie met het oplossen van vergelijkingen in $\mathbb{R}$ noemen we ook hier de koppels $(0,1)$ en $-(0,1)$ de vierkantswortels van -1=(-1,0).

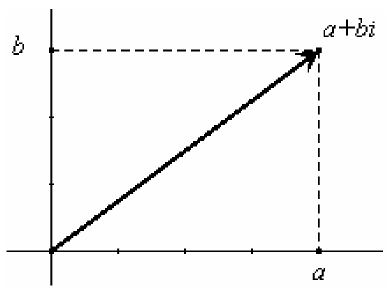
Het koppel $(0,1)$ heeft dus een bijzondere betekenis.

2.2 Definitie

We kiezen voor dit bijzondere koppel een nieuw symbool: $i = (0,1)$. De wiskundige Euler vond dat dit getal alleen in de verbeelding kon bestaan en noemde het daarom imaginair.

We kunnen dan ieder koppel als volgt noteren:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = a(1,0) + b(0,1) = a + bi.$$



Deze nieuwe en verkorte notatie noemen we de Cartesische schrijfwijze van een complex getal.

De verzameling $\left\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$ noemen we de verzameling van de complexe getallen en noteren we met het symbool $\mathbb{C}$.

Voor $z = a + bi \in \mathbb{C}$ noemen we a het reële deel en b het imaginaire deel van z.

Notatie: $a = \operatorname{Re} z$ en $b = \operatorname{Im} z$.

$a + bi = (a,b)$ is een punt van het vlak dat de som is van het punt $(a,0) = a$ op de x-as en het punt $(0,b) = bi$ op de y-as. Daarom noemen we de x-as de reële as en de y-as de imaginaire as.

Op deze manier kunnen we de x-as identificeren met de verzameling van de reële getallen en bekomen zo dat $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2.3 Voordeel van deze schrijfwijze $a + bi$

Daar de elementaire eigenschappen van de bewerkingen blijven gelden zoals in $\mathbb{R}$ en $i^2 = -1$ geldt voor de vermenigvuldiging:

$$\forall\, a,b,c,d \in \mathbb{R} : (a+bi).(c+di) = ac + bd\, i^2 + bc\, i + ad\, i = ac - bd + i\,(ad+bc)\,.$$

Dit stemt helemaal overeen met de distributieve vermenigvuldiging van koppels maar is erg handig om te rekenen.

In deze nieuwe notatie geldt: $\forall\, a,b \in \mathbb{R} : (a+bi)^{-1} = \dfrac{1}{a-bi}\;\dfrac{a-bi}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$.

2.4 Opmerking

Een uitzondering op de analogie met de reële getallen zijn de ordeningseigenschappen. $\mathbb{R}$ noemt men totaal geordend omdat met de orderelatie $\leq$ men de reële getallen kan ordenen van klein naar groot. Iedere twee verschillende reële getallen, x en y, kunnen met elkaar vergeleken worden: $x \leq y$ of $y \leq x$.

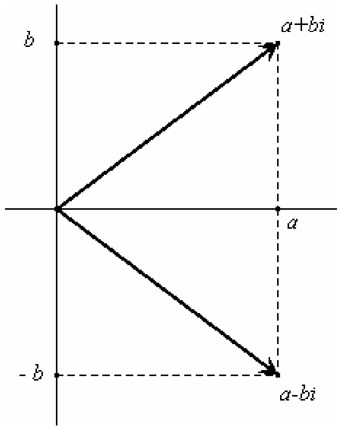
Een dergelijke relatie bestaat echter niet voor $\mathbb{C}$.

2.5 Deling van complexe getallen

$$\forall\, a,b,c,d \in \mathbb{R} : \frac{a+bi}{c+di} = (a+bi).(c+di)^{-1} = \frac{(a+bi).(c-di)}{c^2+d^2}\,.$$

2.6 Complex toegevoegde of geconjugeerde van z

Voor iedere complex getal $z = a + bi$ definiëren we het complex toegevoegde als het complex getal $\overline{z} = a - bi$.



Merk op dat z en $\overline{z}$ mekaars spiegelbeeld zijn t.o.v. de reële as en dat

$z + \overline{z} = 2a$ (reëel)
$z.\overline{z} = a^2 + b^2$ (reëel)

Het uitvoeren van een deling van twee complexe getallen komt neer op het vermeingvuldigen en delen met het complex toegevoegde van de noemer :

$\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1}{z_2}.\dfrac{\overline{z}_2}{\overline{z}_2}$ en $z_2 \cdot \overline{z}_2$ is reëel.

2.7 Rekenen met complexe getallen en de TI-83/84 Plus

Het rekenwerk met complexe getallen in toepassingen kan sterk vereenvoudigd worden door gebruik te maken van de TI-83/84 Plus.

Het complex getal i bevindt zich boven de toets van het decimale punt (eerst op `2nd` drukken en dan op het decimale punt: `2nd`[i]).

Enkele voorbeelden: