SEPTEMBERCURSUS WISKUNDE

DAG 2

Afgeleiden en verloop van functies
Toepassingen van afgeleiden
(Benaderings)parabolen en cirkels

Deel 2 van de septembercursus bevat een aantal basisoefeningen omtrent afleiden en het werken met parabolen en cirkels die je vlot moet kunnen oplossen om een goede start te nemen voor de opleiding Industriële Wetenschappen van de gezamenlijke opleiding van UHasselt en KU Leuven in Diepenbeek.
Als achtergrondinformatie kan je de MOOC 'Wiskunde voor (startende) studenten' gebruiken. Hiervoor kan je je gratis registreren op deze website:

https://iiw.kuleuven.be/studeren/toekomstigestudenten/mooc-wiskunde

Bij de oefeningen in deze tekst verwijzen we regelmatig naar bepaalde modules uit de MOOC zodat je gericht op zoek kan naar de nodige uitleg als je zelf al thuis aan de slag wil. De tijd is sowieso te beperkt om **ALLE** leerstof live op de campus uit de doeken te doen. Tijdens een gemeenschappelijk theorie-uurtje in de voor- **EN** namiddag zetten we de belangrijkste zaken op een rij met veel voorbeelden en praktische (reken)tips. Volgende modules staan op dag 2 in de kijker:

- MODULE 2.1.3 en 2.1.4: verloop van functies en parabolen
- MODULE 4.2.15: cirkels
- MODULE 6.1: afgeleiden

Na de theorie en een korte pauze volgt er een oefensessie van 2 uur in de voormiddag en 1 uur in de namiddag op de campus. Tijdens deze sessie is er tijd om vragen te stellen en ook zelf oefeningen op te lossen onder begeleiding van een docent.

De gezamenlijke opleiding industrieel ingenieur is een initiatief van UHasselt en KU Leuven.

OPGAVE OEFENINGEN

Hoe goed ben je nog in het berekenen van afgeleiden? Test je huidige parate kennis in de MOOC door de 10 vragen te beantwoorden van module 6.1.10.
Breekt het angstzweet je uit bij het zien van alle vragen? ☺ Dan is het beter om er rustig terug in te komen aan de hand van volgende oefeningen met bijhorende tips!

1. De afgelegde weg (in m) van een object wordt gegeven door: $s = 2t^2 + 5t - 3$.
   a) Zoek de gemiddelde snelheid van het object tussen 2 en 5 seconden.
   b) Zoek de ogenblikkelijke snelheid van het object bij t = 2 seconden.

2. Gegeven is een cirkel met straal r.
   a) Waaraan is de formule A voor de oppervlakte van de cirkel in functie van de straal r gelijk? $A(r) = \dots$.
   b) De straal van de cirkel neemt toe van r tot $r + \Delta r$. Bereken de toename van de oppervlakte van de cirkel, d.w.z. bereken $\Delta A = A(r + \Delta r) - A(r)$.
   c) Zoek ook de afgeleide $\frac{dA}{dr}$ van de oppervlakte naar de straal en controleer dat $\lim\limits_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta r} = \frac{dA}{dr}$.

TIP bij oefening 1 en 2: Bekijk het openingsfilmpje van module 6.1 en aansluitend de algemeenheden in verband met het afgeleide-concept in module 6.1.2.

3. Zoek de hoek die de raaklijn aan $y = \sqrt{2x + 3}$ in $(-1, 1)$ maakt met de x-as.

4. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan $y = x \cdot \sin(x)$ in het punt $P\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

5. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan $f(x) = e^{x - \cos(x)} \cdot \ln(x^2 + e)$ in het punt $x = 0$.

TIP bij oefening 3, 4 en 5: Over de meetkundige betekenis van de afgeleide in een punt kan je de video bekijken in module 6.1.3. Heb je het moeilijk om de correcte afgeleiden te vinden? Maak dan eerst oefening 6 om alle regels in te oefenen!

6. Bereken de volgende afgeleiden:

a) $y = 2x(x^2 + x - 1)$

b) $y = \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}$

c) $y = \frac{7x+5}{\sqrt{x^2+1}}$

d) $y = \sin^3(3x^2 + 1)$

e) $y = \tan\left(\frac{x^2}{2x-1}\right)$

f) $y = \mathrm{Bgtg}(\sqrt{1-2x})$

g) $y = \ln(1 + 2\,\mathrm{e}^{-x})$

h) $y = 4^{1+\ln x}$

i) $y = \frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}$

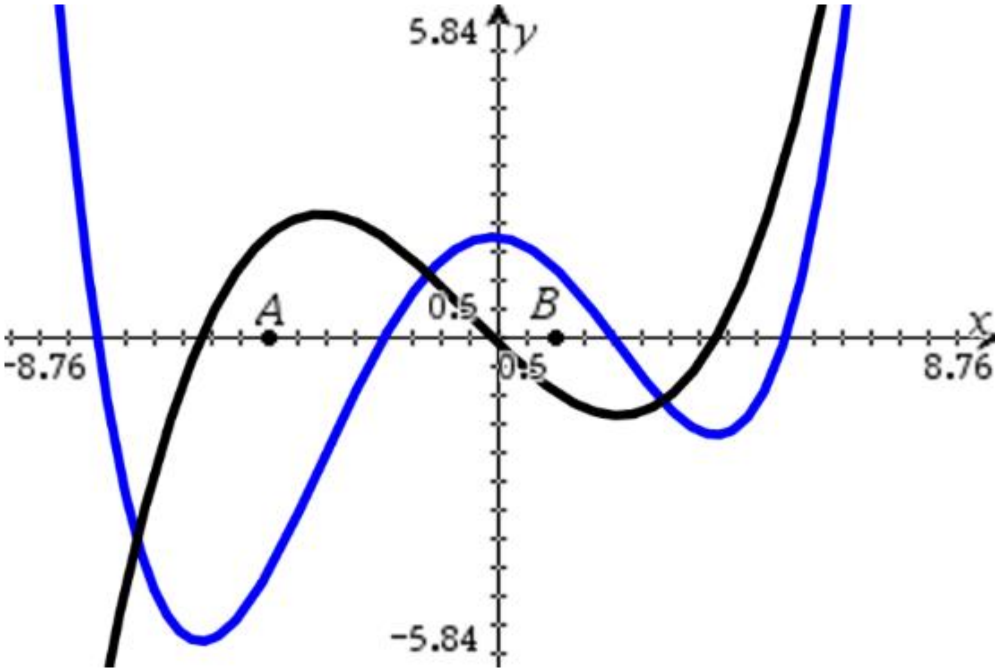
j) $y = x^2 \cdot \mathrm{Bgsin}(\sqrt{2x^2 - 1})$

k) $y = \cos(2x) - \frac{\ln(3x-1)}{x^2+4x+3}$

l) $y = e^{\sin(x)} \cdot \mathrm{tg}(\ln(x) - x)$

TIP bij oefening 6: De rekenregels voor afleiden samen met de basisafgeleiden staan opgesomd in module 6.1.6. Nood aan een uitgewerkt voorbeeld en extra oefeningen met tussenstappen? Bekijk zeker de inhoud van module 6.1.7 en 6.1.8 !

7. Gegeven zijn de grafiek van een functie en de afgeleide functie.



Wie is wie en welke van de volgende uitspraken klopt?

a) $\frac{d^2y}{dx^2}(A) < 0$

b) $\frac{dy}{dx}(A) > \frac{d^2y}{dx^2}(B)$

c) $\frac{dy}{dx}(A) < \frac{dy}{dx}(B)$

d) $y(B) < 0$

8. Bepaal minima en maxima van volgende functies:

   a) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$

   b) $y = \sin(x) - (x + 2)\cos(x)$

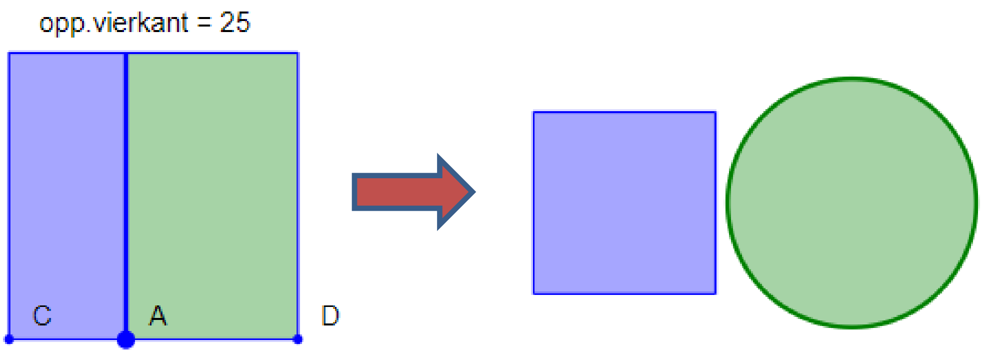
TIP bij oefening 8: Info over het zoeken van (lokale) extrema van functies kan je terugvinden in module 6.1.9, maar ook in module 2.1.3.

9. Een conservenblik in de vorm van een cilinder heeft een inhoud van 2π m³.
   Voor welke waarde van de straal r van het grondvlak is de totale oppervlakte (= mantel + bodem + deksel) van de cilinder minimaal of maximaal?

10. Een rechthoek met lengte l en breedte b heeft een omtrek van 20m. Voor welke waarde van de breedte b is de totale oppervlakte minimaal of maximaal?

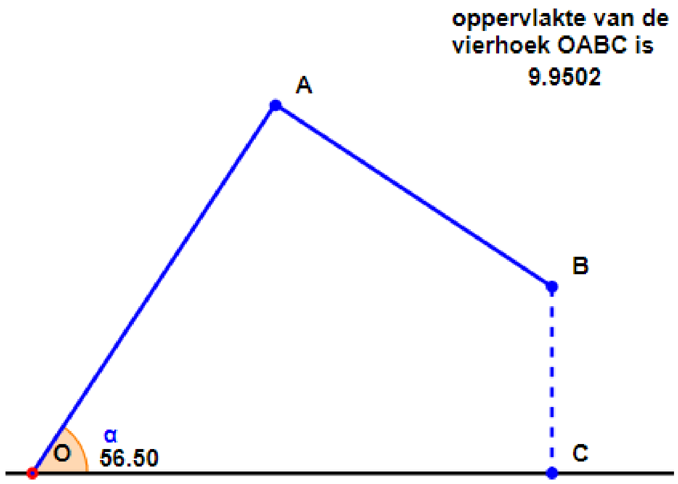
TIP bij oefening 9 en 10: Bij deze 2 extremumvraagstukken moet je eerst op zoek naar een gepaste oppervlaktefunctie in <u>één</u> onbekende waarvan je daarna een extremum moet zoeken. Tot slot moet je motiveren of je een minimum dan wel een maximum gevonden hebt.

11. Een vierkant met zijde 5 (en oppervlakte 25) wordt door een verticaal lijnstuk door A verdeeld in twee delen. Met het linkerdeel maakt men een nieuw vierkant met dezelfde oppervlakte als dit linkerdeel, met het rechterdeel maakt men een cirkel met dezelfde oppervlakte als dit rechterdeel (zie figuur).
    Voor welke verdeling van het eerste vierkant is de **som** van de omtrek van het nieuwe vierkant en de omtrek van de nieuwe cirkel maximaal?



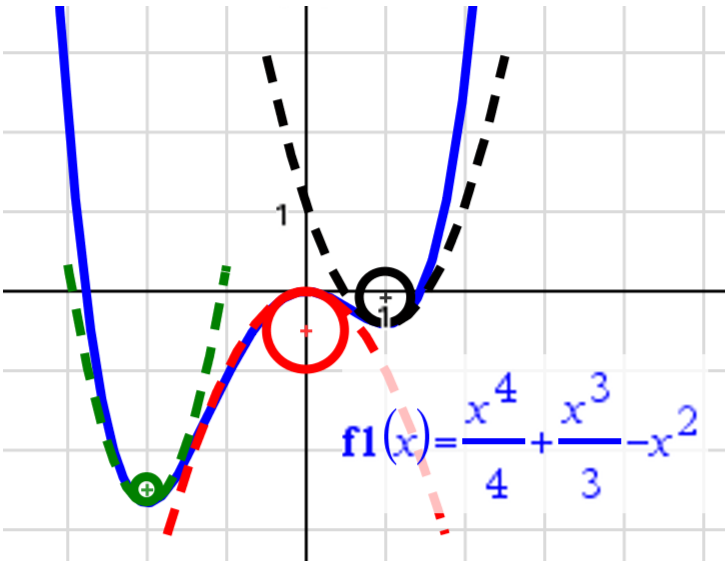
(bron: http://lkwadraat.telenet.be/)

12. Een overkapping bestaat uit een opstaande wand [OA] van 4 m met loodrecht daarop een luifel [AB] van 3 m. Op de tekening zie je een doorsnede van een concrete situatie. Onder welke hoek moet de opstaande wand geplaatst worden opdat de ruimte onder de overkapping (in de vorm van een vierhoek) maximaal is?



(bron: http://lkwadraat.telenet.be/)

13. We hernemen nog een keer oefening 8a en tonen de grafiek van de functie waarop je de positie van de twee minima en het maximum kan aflezen.



Kenmerkend voor een lokaal extremum x_0 van een functie y = f(x) is nu dat je in de buurt van dit extremum de functie perfect kan benaderen door respectievelijk een *dalparabool* (in geval van een minimum) en een *bergparabool* (in geval van een maximum). De formule voor de vergelijking van deze **benaderingsparabool** is algemeen bekend en gelijk aan: $y = f(x_0) + \frac{1}{2} \cdot f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2$.

Een andere manier om de functie in een lokaal extremum te benaderen, is met behulp van een zogenaamde **kromtecirkel.** Hiervan is geweten dat deze een straal $R = \left|\frac{1}{f''(x_0)}\right|$ heeft waarbij het middelpunt van deze cirkel zich bevindt op de verticale lijn $x = x_0$. De y-coördinaat van het middelpunt is daarbij gelijk aan $f(x_0) \pm R$ afhankelijk van de extremum-situatie (zie figuur).

Zoek nu voor deze functie de cartesische vergelijking van de benaderingsparabool EN de kromtecirkel in elk van de drie lokale extrema.

14. De functie $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+2}$ bereikt een lokaal extremum in het punt $x = -1$.

    Is dit punt een minimum of een maximum? Geef bovendien ook de vergelijking van de benaderingsparabool EN van de kromtecirkel in dit lokaal extremum.

Parabolen en cirkels spelen dus een belangrijke rol in de wiskunde bij het benaderen van functies of om de kromming van een functie goed in kaart te brengen. Vandaar dat we eindigen met nog een aantal losse oefeningen op parabolen en cirkels. Deze kan je hopelijk allemaal "spelenderwijs" oplossen!

15. Zijn volgende parabolen berg- of dalparabolen? Herwerk daarbij elke parabool in de vorm $y = a \cdot (x-h)^2 + k$.

    a) $y = 2x^2 - 48x + 60$
    b) $y = 18 - x^2 + 2x$
    c) $y = -5x^2 - 20x - 10$
    d) $y = 4x - 12 + 3x^2$

16. Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 1$ en $g(x) = -(x+2)^2 - 4$. Los op:

    a) Geef de coördinaten van de top van de grafiek van f en g.
    b) De grafiek van f wordt 3 naar rechts geschoven en in verticale richting (t.o.v. de x-as) uitgerekt met een factor 4. Stel de formule op van de beeldgrafiek en schrijf de coördinaten op van de top van de beeldgrafiek.
    c) De grafiek van g wordt 1 naar links en 2 omhoog verschoven. Stel de formule op van de beeldgrafiek en schrijf de coördinaten op van de top van de beeldgrafiek.

TIP bij oefening 16: Een mooi overzicht van de impact van een verschuiving, uitrekking of samenpersing (inkrimping) van een functie in horizontale of verticale richting, zie je in de samenvatting gebeuren op volgende website: https://feb.kuleuven.be/public/u0003131/Vervormingen/.

17. Stel een vergelijking op voor de cirkel met
    a) middelpunt M = (3, 4) en straal r = 2 ;
    b) middelpunt M = (-2, 4) die door het punt A = (3, 3) gaat.

18. Bepaal het middelpunt en de straal van de volgende cirkels:
    a) $C : 3x^2 + 3y^2 - 24x + 6y + 24 = 0$;
    b) $C : x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$.

19. Voor welke waarden van f is de volgende kegelsnede een cirkel met straal 1 ?

$$C : x^2 + y^2 - 4x + 2f \cdot y + 12 = 0\,?$$

TIP bij oefening 17, 18 en 19: Over cirkels kan je meer info in de MOOC terugvinden in module 4.2.15 en 4.2.16.

BEKNOPTE OPLOSSINGEN

1. a) 19 m/s; b) 13 m/s
2. a) $A(r) = \pi r^2$; b) $\Delta A = 2\pi r \Delta r + \pi(\Delta r)^2$; c) $\frac{dA}{dr} = 2\pi r = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta r}$
3. hoek is 45°
4. vergelijking raaklijn: y = x
5. vergelijking raaklijn: $y = \frac{x+1}{e}$
6. a) $y' = 6x^2 + 4x - 2$; b) $y' = (-6/5)\, x^{-8/5}$; c) $y' = \frac{-5x+7}{(x^2+1)^{3/2}}$;

   d) $y' = 18x \sin^2(3x^2 + 1) \cos(3x^2 + 1)$; e) $y' = \frac{2x^2-2x}{(2x-1)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2(x^2/(2x-1))}$;

   f) $y' = \frac{-1}{(2-2x)\sqrt{1-2x}}$; g) $y' = \frac{-2e^{-x}}{1+2e^{-x}}$; h) $y' = \frac{(\ln 4)\cdot 4^{1+\ln x}}{x}$; i) $y' = \frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}$;

   j) $y' = 2x \cdot \mathrm{Bgsin}(\sqrt{2x^2 - 1}) + \frac{2x^3}{\sqrt{2-2x^2}\sqrt{2x^2-1}}$

   k) $y' = -2 \cdot \sin(2x) - \frac{3}{(3x-1)\cdot(x^2+4x+3)} + \frac{\ln(3x-1)\cdot(2x+4)}{(x^2+4x+3)^2}$

l) $y' = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \cdot \mathrm{tg}(\ln(x) - x) + e^{\sin(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(\ln(x)-x)} \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right)$

7. De blauwe grafiek is de functie en uitspraak (b) is de enige correcte uitspraak.

8. a) minimum bij $x = -2$ en $x = 1$; maximum bij $x = 0$.

   b) maximum bij -2, oneven positieve veelvouden en even negatieve veelvouden van π ; minimum bij 0, even positieve en oneven negatieve veelvouden van π

9. $r = 1$ (minimum)

10. $b = 5$ (maximum)

11. De som van de omtrek is maximaal wanneer het verticale lijnstuk op $\frac{20}{4+\pi}$ eenheden rechts van C komt te liggen.

12. De optimale hoek is 1,4289 radialen (81°52’ 11.63’’).

13. De cartesische vergelijking van de drie benaderingsparabolen is:

    $y = -\frac{8}{3} + 3(x+2)^2$; $y = -x^2$; $y = -\frac{5}{12} + \frac{3}{2}(x-1)^2$

    De kromtecirkels hebben respectievelijk als vergelijking:

    $$(x+2)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{36}\ ; x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\ ;\ (x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

14. In het punt $x = -1$ is een lokaal minimum. De vergelijking van de benaderingsparabool is gelijk aan $y = -1 + \frac{(x+1)^2}{3}$ en de kromtecirkel heeft als vergelijking $(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

15. a) dalparabool: $y = 2(x-12)^2 - 228$

    b) bergparabool: $y = -(x-1)^2 + 19$

    c) bergparabool: $y = -5(x+2)^2 + 10$

    d) dalparabool: $y = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{40}{3}$

16. a) toppen: $(0,1)$ voor $f(x)$ en $(-2,-4)$ voor $g(x)$

    b) $y = 3(x-3)^2 + 4$ met als top $(3,4)$

    c) $y = -(x+3)^2 - 2$ met als top $(-3,-2)$

17. a) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$; b) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 26$

18. a) $M = (4,-1)$ en straal r = 3 ; b) $M = (3/2, 2)$ en straal r = 5/2

19. $f = \pm 3$