1 Bewerkingen met matrices invoeren via voorbeelden

1.1 n-tallen en de bewerkingen

$(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)$ is een n-tal met $a_i \in \mathbb{R}$.

De verzameling van reële n -tallen noteren we met $\mathbb{R}^n$

Definieer de <u>*som*</u> als $(a_1,a_2,a_3,...,a_n) + (b_1,b_2,b_3,...,b_n) = (a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,...,a_n+b_n)$.

Het tegengesteld n-tal is dan $(-a_1,-a_2,-a_3,...,-a_n)$ en het nulelement: $(0,0,0,...,0)$.

$\mathbb{R}^n$ uitgerust met de som, $\mathbb{R}^n,+$, is een commutatieve groep.

Definieer de <u>*scalaire vermenigvuldiging*</u> als $\lambda(a_1,a_2,...,a_n)=(\lambda a_1,\lambda a_2,...,\lambda a_n)$ met $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tot slot kun je je afvragen hoe de <u>*vermenigvuldiging*</u> gedefinieerd kan worden.

Neem (a_1,a_2) en $(b_1,b_2) \in \mathbb{R}^2$.

Definiëer de vermenigvuldiging even als volgt: $(a_1,a_2).(b_1,b_2) = (a_1b_1,a_2b_2)$ met $(1,1)$ als eenheidselement.

Met deze definitie heb je een probleem dat een aantal elementen geen inverse hebben.

Neem bijvoorbeeld $(a,0)$. We zoeken dan (x,y) zodat $(a,0).(x,y) = (1,1)$.

Volgens de definitie geldt dat $(a,0).(x,y) = (ax,0y) = (1,1) \Rightarrow ax = 1$ en $0y = 1$ is vals.

Een andere definitie voor de vermenigvuldiging is aangewezen.

1.2 Invoeren van matrices

Neem $i \in \{1,2,3,.....,m\}$ en $j \in \{1,2,3,.....,n\}$
en de afbeelding $a : (i,j) \mapsto a(i,j) = a_{ij}$.

We schrijven deze $m.n$ beelden in een tabel en noemen dit een $m \times n$ -matrix.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .. & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & .. & a_{3n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & .. & a_{mn} \end{bmatrix}$$ met m rijen en n kolommen

Een matrix noemt met vierkant als $m = n.$ Het aantal rijen noemen we de orde van de matrix.

Bijzondere vierkante matrices:

- *NULMATRIX*: alle elementen gelijk aan nul.
- *Diagonaalmatrix*: $a_{ij} = 0$ voor $i \neq j$ en $a_{ij} \in \mathbb{R}$ voor $i = j$.
- *SCALAIRE MATRIX*: diagonaalmatrix met gelijke elementen op de hoofddiagonaal.

De verzameling van alle reële $m\times n$-matrices noteren we met $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Twee matrices zijn gelijk als de overeenkomstige elementen gelijk zijn, m.a.w. voor $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$ geldt dat $A=B \Leftrightarrow \forall\, i\in\{1,2,...,m\}, \forall\, j\in\{1,2,...n\}: a_{ij}=b_{ij}$.

Twee matrices *gelijksoortig* als ze dezelfde dimensie hebben.

1.3 Som van matrices

Een herbergier heeft in zijn café een voorraad van 2 bakken cola en 3 bakken cola light, 4 bakken fruitsap en 2 bakken calorie-arme fruitsap, 6 bakken pils en 1 bak alcoholvrij bier. Voor de kermis van zaterdag vreest hij een tekort en hij doet een bijkomende bestelling van 2 bakken cola en 2 bakken cola-light, 3 bakken fruitsap en 4 bakken calorie-arm fruitsap, 5 bakken pils en 2 bakken alcoholvrij bier.

We plaatsen de voorraad in een voorraadmatrix A en de bestelling in een bestellingsmatrix B.

$$A=\begin{array}{c} cola \\ fruitsap \\ bier \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{array}{c} cola \\ fruitsap \\ bier \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Wat is nu zijn nieuwe voorraad?

4 bakken cola en 5 bakken cola-light, 7 bakken fruitsap en 6 bakken calorie-arm fruitsap, 11 bakken pils en 3 bakken alcoholvrij bier.

Deze waarden schikken we weer in een matrix C:

$$C=\begin{array}{c} cola \\ fruitsap \\ bier \end{array}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$$

C bekom je door de overeenkomstige elementen (elementen met een zelfde rijnummer en eenzelfde kolomnummer) van A en B op te tellen.

Men kan alleen gelijksoortige matrices optellen!

<u>Algemene definitie</u>

Voor $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$ en $B=[b_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$ geldt $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

Voor een matrix $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$ noemen we de matrix $-A=[-a_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$ de tegengestelde matrix.

Voor $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$ en $B=[b_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$ definiëren we het verschil als volgt:

$A-B=A+(-B)=[a_{ij}-b_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

1.4 Scalaire vermenigvuldiging

Als de herbergier een dubbel zo grote bestelling doet (de weersvoorspellingen zijn heel gunstig) dan vraagt hij 4 bakken cola en 4 bakken cola-light, 6 bakken fruitsap en 8 bakken caloriearm fruitsap, 10 bakken pils en 4 bakken alcoholvrij bier.

Het plaatsen van deze getallen in een matrix D geeft:

$$D = \begin{array}{c} cola \\ fruitsap \\ bier \end{array} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}.$$

Indien we alle elementen van de eerste bestellingsmatrix vermenigvuldigen met 2, bekomen we de matrix D.

Algemene definitie

Voor $k \in \mathbb{R}$ en $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ is $kA = [ka_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

1.5 De vermenigvuldiging

Als we een vermenigvuldiging definiëren zoals bij n-tallen, $(A \cdot B)_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}$, is dit ook nu weer geen erg nuttige vermenigvuldiging.

We voeren daarom de volgende vermenigvuldiging in.

UITGEWERKT VOORBEELD

Alle onderstaande getallen komen uit de voedingsmiddelentabellen van NUBEL (www.nubel.com) en geven waarden aan per 100g van het voedingsmiddel.

Een ontbijt bestaat uit chocolademelk (halfvol), croissant, volkorenbrood en mager kalkoenbeleg.

Chocolademelk	3,2 g eiwit	1,6 g vet	12,9 g koolhydraten	0 g vezels
Croissant	9,2 g eiwit	26,3 g vet	50.3 g koolhydraten	2,3 g vezels
Volkorenbrood	11,1 g eiwit	2,3 g vet	44 g Koolhydraten	6,4 g vezels
Kalkoen	22,6 g eiwit	1,4 g vet	0,6 g koolhydraten	0 g vezels

Een ontbijt bestaat uit a gram chocolademelk, b gram croissant, c gram volkorenbrood en d gram kalkoenbeleg.

Hoeveel eiwit, vet, koolhydraten (KH) en vezels bevat dit ontbijt? We gebruiken de cijfers uit de bovenstaande tabel die omgerekend worden naar 1 g van het voedingsmiddel.

Eiwit: $0{,}032\,a + 0{,}092\,b + 0{,}011\,c + 0{,}226\,d$
Vet: $0{,}016\,a + 0{,}263\,b + 0{,}023\,c + 0{,}014\,d$
KH: $0{,}129\,a + 0{,}503\,b + 0{,}44\,c + 0{,}006\,d$
Vezels: $0\,a + 0{,}023\,b + 0{,}064\,c + 0\,d$

Telkens wordt voor elk bestanddeel (eiwit, vet, KH, vezels) in de **4** voedingselementen van het ontbijt het product gemaakt met de **4** gebruikte hoeveelheden a, b, c en d.

We schikken de gegevens in een matrix A van 4 rijen en 4 kolommen.

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{E} \\ \text{V} \\ \text{KH} \\ \text{Vez} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Ch} & \text{Cr} & \text{Vkbr} & \text{Kb} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,032 & 0,092 & 0,111 & 0,226 \\ 0,016 & 0,263 & 0,023 & 0,014 \\ 0,129 & 0,503 & 0,44 & 0,006 \\ 0 & 0,023 & 0,064 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Om het eiwit-, vet-, koolhydraten- en vezelgehalte in het volledige ontbijt te kennen moeten de **4** elementen op elke rij vermenigvuldigd worden met de **4** hoeveelheden a, b, c en d.

Deze **4** getallen schikken we in een kolommatrix B.

$$B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{Ch} \\ \text{Cr} \\ \text{Vkbr} \\ \text{Kb} \end{array}$$

0.032 a + 0.092 b + 0.111 c + 0.226 d is het product van de 4 elementen van de eerste rij met de 4 elementen van de kolom.

Zo ook vermenigvuldigen we de 4 elementen van de tweede, derde en vierde rij met de 4 elementen van de kolom.

Deze 4 producten schikken we in een kolommatrix C.

$$C = \begin{bmatrix} 0,32a + 0,092b + 0,111c + 0,226d \\ 0,016a + 0,263b + 0,023c + 0,014d \\ 0,129a + 0,503b + 0,44c + 0,006d \\ 0a + 0,023b + 0,064c + 0d \end{bmatrix}$$

C noemen we het product van A en B.

Op deze manier is de vermenigvuldiging van matrices ingevoerd. Let vooral op de voorwaarde dat het aantal elementen van een rij van A gelijk moet zijn aan het aantal elementen van een kolom van B of anders gezegd moet het aantal kolommen van A gelijk zijn aan het aantal rijen van B (rij-kolom regel).

In ons voorbeeld is A een $\boxed{4}$ x **4** matrix en B een **4** x $\boxed{1}$ matrix.

Voor $C = A \cdot B$ is het aantal rijen $\boxed{4}$, het aantal rijen van A en het aantal kolommen $\boxed{1}$, het aantal kolommen van B.

Merk op dat gezien bovenstaande voorwaarde $B \cdot A$ onmogelijk is! M.a.w. De vermenigvuldiging van matrices is **niet-commutatief.**

<u>Algemene definitie</u>

Als $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times p}$ en $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{p \times n}$ is $C = A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ met

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots.. + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj} \quad (\ i \in \{1, 2, \ldots, m\},\ j \in \{1, 2, \ldots n\}\ ).$$

Opmerking
Voor de vermeningvuldiging van reële getallen, bijvoorbeeld x en y, geldt de eigenschap dat indien $x \cdot y = 0$ dat ofwel $x = 0$ of dat $y = 0$.

Voor de vermenigvuldiging van matrices geldt deze eigenschap niet.

Als tegenvoorbeeld beschouwen we de matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ en $B \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Duidelijk geldt dat $A \neq 0$ en $B \neq 0$ maar toch geldt dat $A \cdot B = 0$.

A en B nomet men nuldelers.

1.6 Eenheidsmatrix en inverse matrix

1.6.1 Eigenschappen in $\mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$ is 1 het eenheidselement voor de vermenigvuldiging daar $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
In $\mathbb{R}$ heeft elk getal $a \neq 0$ een inverse voor de vermenigvuldiging want
$a. a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1 = \frac{1}{a}.a = 1$ (Let op de commutativiteit!).

In $\mathbb{R}$ geldt voor $a \neq 0$: $a \cdot x = b \Leftrightarrow a^{-1} \cdot a \cdot x = a^{-1} \cdot b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$.

1.6.2 Analoge eigenschappen bij matrices

De **eenheidsmatrix** $\boldsymbol{I}$ is een vierkante matrix die vermenigvuldigd met een vierkante matrix A van dezelfde dimensie terug die matrix A oplevert.

$A \cdot I = I \cdot A = A$ (Zie analogie met de vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$.)

Uit de rij-kolomregel en uit de commutativiteitsvoorwaarde volgt dat alleen bij de vermenigvuldiging van vierkante matrices het zinvol is te praten over een eenheidsmatrix.

We bepalen de eenheidsmatrix van orde 2 .

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + bz = a \\ cx + dz = c \end{cases} \text{ en } \begin{cases} ay + bu = b \\ cy + du = d \end{cases}.$$

Het oplossen van deze stelsels van 2 lineaire vergelijkingen met 2 onbekenden geeft als oplossing $\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Indien A een **inverse** matrix, A^{-1}, heeft, moet $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$ (Zie analogie in $\mathbb{R}$.). In $\mathbb{R}$ heeft enkel 0 geen invers element. En wat in $\mathbb{R}^{nxn}$?

Heeft $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ een inverse? En $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$?

We bepalen de voorwaarde opdat $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ een invers heeft.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+bz=1 \\ cx+dz=0 \end{cases} \text{ en } \begin{cases} ay+bu=0 \\ cy+du=1 \end{cases}.$$

Het oplossen van deze stelsels, (x,y,x,u) i.f.v. (a,b,c,d), geeft de volgende voorwaarde om oplossingen te hebben: $ad-bc \neq 0$.

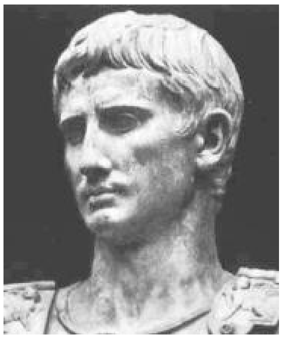
Vierkante matrices die een inverse matrix hebben, noemen we heten **regulier** en in het andere geval **singulier**.

Meetkundige interpretatie

Elk stelsel stelt 2 rechten voor. Beide stelsels hebben één oplossing voor elke onbekende als de rechten snijdend zijn, m.a.w. als de richtingscoëfficiënten verschillend zijn: $-\frac{a}{b} \neq -\frac{c}{d}$.

1.6.3 Toepassing

Cryptologie is de leer van geheime codes en wordt gebruikt voor het ontcijferen van bankkaartcodes, paswoorden, … .



a. METHODE VAN CAESAR

De eenvoudigste toepassing van substitutie-vercijfering werd ingevoerd door Julius Caesar. Elke letter van het alfabet wordt vervangen door de letter die 3 plaatsen verder staat in het alfabet.

Voorbeeld	PUKKELPOP	$C: p \mapsto p+3$
	SXNNHPSRS	$D: p \mapsto p-3$

b. GEBRUIK VAN MATRICES

Een andere methode is het gebruik van **matrices** bij coderen en decoderen:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

U	V	W	X	Y	Z	$-$	A	B	C	D	E	F	
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	…………

Voorbeeld	P	U	K	K	E	L	P	O	P
	16	21	11	11	5	12	16	15	16

Stap 1

Schrijf de letters in 2x1 matrices en zet om in getallen.

$$\begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K \\ K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E \\ L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ - \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 16 \\ 21 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Stap 2 **- Codering (encryptie)**

Kies een willekeurige vierkante matrix van dimensie 2, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, en bereken:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 37 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 22 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 31 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 43 \end{bmatrix}$$

De boodschap wordt: $\begin{bmatrix} 21 \\ 37 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 22 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 17 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 31 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 27 \\ 43 \end{bmatrix}$.

Terug omgezet in letters geeft dit:

$$\begin{matrix} 21 & 37 & 11 & 22 & 12 & 17 & 15 & 31 & 27 & 43 \\ U & J & K & V & L & Q & O & D & - & P \end{matrix}$$

Voor het terug omzetten in letters trekken we voor getallen groter dan 27 een veelvoud van 27 af en voor getallen kleiner dan 1 tellen we een veelvoud van 27 bij.

Bijvoorbeeld: 30 $\to 30-27=3 \to C$ -12 $\to -12+27=15 \to O$.

Stap 3 **- Decoderen of ontcijferen (decryptie)**

$$\begin{bmatrix} 21 \\ 37 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 22 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 17 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 31 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 27 \\ 43 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 21 & 37 & 11 & 22 & 12 & 17 & 15 & 31 & 27 & 43 \\ U & J & K & V & L & Q & O & D & - & P \end{matrix}$$

Diegene die de boodschap ontvangt moet dit ontcijferen en de vermenigvuldiging met de sleutel $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ opheffen. Dit komt er op neer een matrix te vinden die weer de oorspronkelijke getallen teruggeeft.

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 21 \\ 37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 21 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 11 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 \\ 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 27 \\ 43 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 27 \end{bmatrix}$$

We zoeken $\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$ zodat $\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

De rij-kolomregel toepassen, geeft: $\begin{cases} 0x+1y=1 \\ 1x+1y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ en $\begin{cases} 0z+1u=0 \\ 1z+1u=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=0 \\ z=1 \end{cases}$

Volgens de definitie van de inverse matrix, is dit de matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1.7 Associativiteit van de vermenigvuldiging

We hernemen ons ontbijt en we willen het aantal Kcal (eenheid van energiewaarde) kennen.
(1 Joule = 4.2 Kcal)

1 g <u>eiwit</u> bevat 4 Kcal
1 g <u>vet</u> bevat 9 Kcal
1 g <u>koolhydraten</u> bevat 4 Kcal
1 g <u>vezels</u> bevat 0 Kcal

Hoeveel Kcal is er in 100 g chocolademelk?

100 g chocolademelk bevat 3,2 g eiwit, 1,6 g vet, 12,9 g KH en 0 g vezels en zo

3,2 . 4 + 1,6 . 9 + 12,9 . 4 + 0 . 0 = 78,8 Kcal.

We bepalen een nieuwe matrix D met de energiewaarden van eiwit, vet, KH en vezels. Vermits in het product 3,2; 1,6; 12,9; en 0 de getallen zijn op de eerste kolom van A en rekening houdend met de rij-kolomregel zal D een 1 x 4 matrix moeten zijn die we links vermenigvuldigen met A.

Noem $D \cdot A = E$ met elementen e_{ij} voor $i = 1$ en $j \in \{1,2,3,4\}$.

Per gram geeft dit:

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 4 & 0 \end{bmatrix} . \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Ch} & \text{Cr} & \text{Vkbr} & \text{Kb} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,032 & 0,092 & 0,111 & 0,226 \\ 0,016 & 0,263 & 0,023 & 0,014 \\ 0,129 & 0,503 & 0,44 & 0,006 \\ 0 & 0,023 & 0,064 & 0 \end{bmatrix} \end{array} =$$

$$\begin{bmatrix} 4\times 0,032+9\times 0,016+4\times 0,129+0\times 0 & e_{12} & e_{13} & e_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,788 & e_{12} & e_{13} & e_{14} \end{bmatrix}$$

e_{11} geeft de energiewaarde in 1 g chocolademelk (halfvol) = 0,788 Kcal,
e_{12} geeft de energiewaarde in 1 g croissant = 4,747 Kcal,
e_{13} geeft de energiewaarde in 1 g volkorenbrood = 2,411 Kcal,
e_{14} geeft de energiewaarde in 1 g kalkoen = 1,054 Kcal.

Veronderstel dat ons ontbijt als volgt is samengesteld:
a = 250 g (chocolade), b = 35 g (croissant),
c = 60 g (volkorenbrood) en d = 50 g (kalkoen).

$$D = \begin{bmatrix} 250 \\ 35 \\ 60 \\ 50 \end{bmatrix}$$

De energiewaarde in dit ontbijt bedraagt:

0,788 . 250 + 4,747 . 35 + 2,411 . 60 + 1,054 . 50 = 560,505 Kcal.

$$\begin{bmatrix} 0,788 & 4,747 & 2,411 & 1,054 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 250 \\ 35 \\ 60 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 560,505 \end{bmatrix} = F$$

of kortweg: $(D \cdot A) \cdot B = E \cdot B = F$.

We gaan na of het verplaatsen van de haakjes, $D \cdot (A \cdot B) = D \cdot C = G$, hetzelfde resultaat oplevert.

We bepalen $A \cdot B = C$. De matriix C geeft ons het eiwit, het vet, het KH en het vezelgehalte in het ontbijt.

$$C = \begin{bmatrix} 0,032 & 0,092 & 0,111 & 0,226 \\ 0,016 & 0,263 & 0,023 & 0,014 \\ 0,129 & 0,503 & 0,44 & 0,006 \\ 0 & 0,023 & 0,064 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 250 \\ 35 \\ 60 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 29,18 \\ 15,285 \\ 76,555 \\ 4,645 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Eiwit} \\ \text{Vet} \\ \text{KH} \\ \text{Vezels} \end{array}$$

Om de totale energiewaarde te kennen maken we het product:

4 . 29,18 + 9 . 15,285 + 4 . 79,255 + 0 . 4,645 = 571,305 Kcal .

In matrixnotatie geeft dit: $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 4 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 29,18 \\ 15,285 \\ 76,555 \\ 4,645 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 560,505 \end{bmatrix} = G$.

We besluiten dat $(D \cdot A) \cdot B = D \cdot (A \cdot B)$.

De associativiteit van de vermenigvuldiging van matrices kan men formeel bewijzen.