Zelfstudieopdracht - Dynamische Systemen

1. Bepaal de vaste punten van $F(x) = 1,5x^2 - \frac{1}{3}$.

2. Voor een continue functie $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ met x_0 een vast punt geldt:

   (i) x_0 is een aantrekkend vast punt als $\left|F'(x_0)\right| < 1$,

   (ii) x_0 is een afstotend vast punt als $\left|F'(x_0)\right| > 1$ en

   (iii) x_0 is neutraal als $\left|F'(x_0)\right| = 1$.

   Ga na of de vaste punten uit opgave 1 aantrekkend of afstotend zijn.
   Controleer je antwoord met een webgrafiek.

3. Ga grafisch na of $F(x) = 1,5x^2 - \frac{1}{3}$ een 2-cyclus heeft?

4. Bepaal grafisch (numeriek) de 2-cyclus van $F = 1,5x^2 - \frac{2}{3}$.

5. Algemeen geldt dat een periodiek punt x_0 met periode 2 aantrekkend (afstotend) is als dit punt een aantrekkend (afstotend) vast punt is van F^2.

   We zeggen dan ook dat de 2-cyclus waartoe x_0 behoort, $x_0, x_1, x_0, x_1, \ldots$, aantrekkend of afstotend is.

   Uit de kettingregel ([1]) volgt: $(F^2)'(x_0) = (F \circ F)'(x_0) = F'(F(x_0)) \cdot F'(x_0)$.

   Dit geeft: $(F^2)'(x_0) = F'(x_1) \cdot F'(x_0)$.

   Bepaal hiermee of de 2-cyclus uit opgave 4 aantrekkend of afstotend is.

   Controleer je antwoord met een webgrafiek.

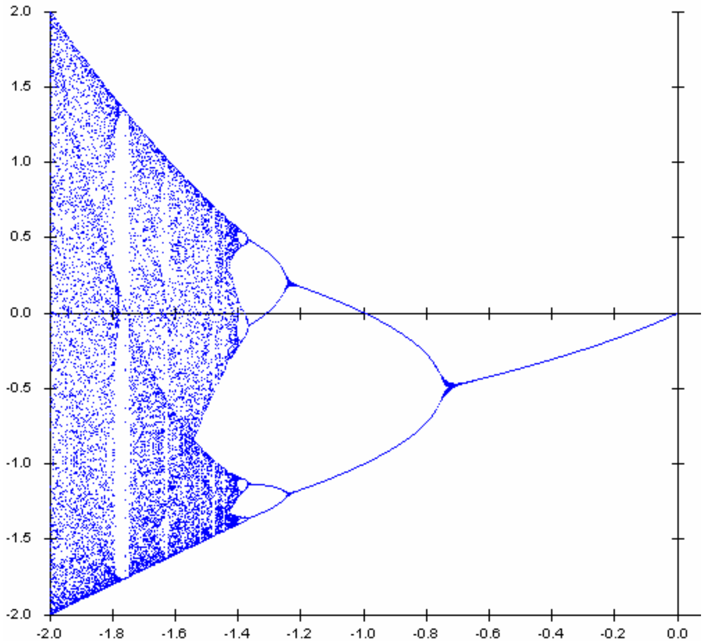
6. Bespreek voor $F(x) = 1,5x^2 + a$ het al dan niet bestaan van vaste punten van F i.f.v. de parameter a: $F(x) = x \Leftrightarrow 1,5x^2 + a = x \Leftrightarrow 1,5x^2 - x + a = 0$.

   Toon aan dat indien er twee vaste punten zijn er altijd één afstotend is en bepaal de voorwaarde, i.f.v. a, opdat het andere vast punt aantrekkend is.

---

[1] Voor $f_1(x) = x^2$ en $f_2(x) = \sin(x)$ geldt: $f(x) = \sin(x^2) = f_2(f_1(x)) = (f_2 \circ f_1)(x)$.
En $f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x = f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x)$.

7. Het Feigenbaum-diagram bestudeert de invloed van parameterveranderingen op het dynamisch gedrag van een functie F. Het Feigenbaum-diagram voor $F(x) = x^2 + a$ ziet er als volgt uit.



Bovenstaande plot wordt verticaal lijn per lijn als volgt geconstrueerd.

- De paramater a wordt uitgezet op de X -as en we berekenen bv. een 40-tal iteraties, vertrekkende van een startwaarde x_0, die we niet aanduiden op de plot.
- Daarna plotten we bv. de volgende 100 iteraties, namelijk de punten $(a, F^{41}(x_0))$ tot en met $(a, F^{140}(x_0))$.

Op deze plot krijgen we een goede benadering van de aantrekkende cycli per parameter.

Voor $F(x) = x^2 + a$ zien we een eerste vertakking bij $a = -\frac{3}{4}$, het aantrekkende vast punt splitst zich op in een aantrekkende 2-cyclus.

Bij $a = -\frac{5}{4}$ doet zich een periodeverdubbeling voor, de aantrekkende 2-cyclus wordt vervangen door een aantrekkende 4-cyclus, ...

Dit steeds verdubbelen van de periode, een bifurcatie, noemt men de periode-verdubbelings-route tot chaos.

Bepaal, met de Java Applet Webgrafiek, voor $F(x) = 1,5x^2 + a$ de a-waarden waarvoor:

a. het aantrekkend vast punt omslaat in een aantrekkende 2- cyclus,
b. de aantrekkende 2-cyclus in een aantrekkende 4-cyclus en
c. de aantrekkende 4-cyclus in een aantrekkende 8-cyclus.

Geef het functie voorschrift in als $1.5 * x \wedge 2 + a$ met de volgende settings:

$$\begin{cases} a = -2...0 \\ x = -1.4...0 \\ y = -1.4...1.4 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

En toon de iteratiestappen van 50 tot 500.