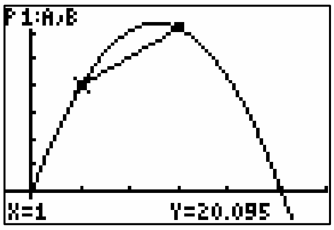
Differentiequotiënt

1. Voorbeeld 1 – Snelheid

We bekijken even de baan van een kogel die loodrecht de lucht wordt ingeschoten met een beginsnelheid van $25\ \frac{m}{s^2}$. Deze beweging (afstand in m) wordt beschreven door de vergelijking $x(t) = 25t - \frac{1}{2} g\, t^2$ met $g = 9.81\ \frac{m}{s^2}$.



We stellen ons de vraag: *Wat is de snelheid na* 1 *s?*.

In het tijdsinterval $[1,3]$ legt de kogel een afstand af van $x(3) - x(1) = 10.76\ m$. De kogel heeft in dit tijdsinterval een gemiddelde snelheid van $\frac{x(3)-x(1)}{3-1} = \frac{10.76}{2} = 5.38\,\frac{m}{s}$.

We verkleinen het tijdsinterval rond $t = 1s$ en berekenen telkens de gemiddelde snelheid.

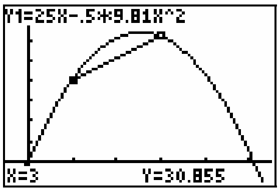
$[1,t]$	$\frac{x(t)-x(1)}{t-1}$
$[1,3]$	5.38
$[1,2]$	10.29
$[1,1.5]$	12.74
$[1,1.3]$	13.72
$[1,1.1]$	14.70
$[1,1.01]$	15.14
$[1,1.001]$	15.19
$[1,1.0001]$	15.19

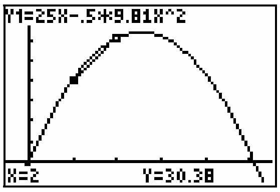
Tabel 1

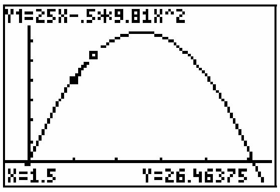
Het quotiënt $\frac{x(t)-x(1)}{t-1}$ noemen we een differentiequotiënt.

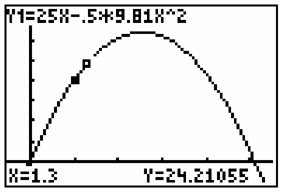
Notatie: $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t)-x(1)}{t-1}$.

Dit differentiequotiënt stelt hier de gemiddelde snelheid voor over het tijdsinterval $[1,t]$, m.a.w hoe de afstand verandert in verhouding tot de verandering in tijd. Indien we het tijdsinterval zo klein nemen dat we de grootte ervan niet meer kunnen waarnemen met het blote oog, kunnen we het differentiequotiënt beschouwen als een goede benadering voor de snelheid op het ogenblik $t = 1$.





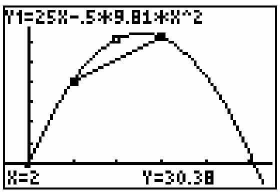


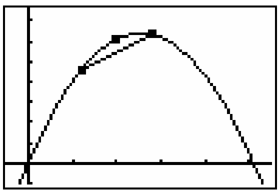


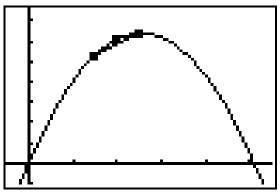
Het differentiequotiënt over een zeer klein tijdsinterval kan beschouwd worden als maat voor de verandering van de afstand in verhouding tot de tijd.

2. Numerieke afgeleide

Differentiequotiënten kunnen ook als volgt berekend worden $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_0+h) - x(t_0-h)}{2h}$ met $h > 0$. Onderstaande schermafdrukken tonen hoe deze differentiequotiënten kunnen gebruikt worden om de ogenblikkelijke snelheid in $t = 2$ te berekenen.

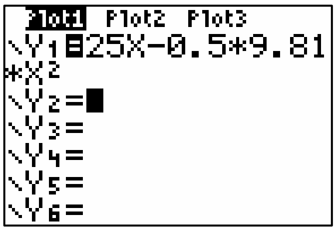


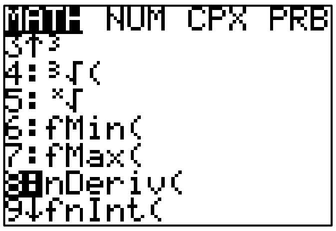


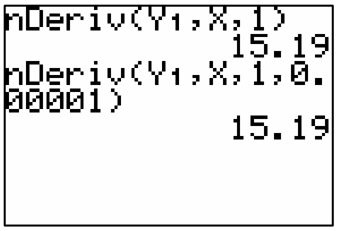


Zo’n differentiequotiënt noemt men een numerieke afgeleide. De numerieke afgeleide voor $h = 0.001$ in $t = 1$ wordt, door de TI-83/84 Plus, berekend met het commando MATH<MATH> 8:nDerive(Y1,X,1).

In dit commando moet je als eerste parameter de functie aangeven, als tweede parameter de variabele en als derde het punt waar je deze afgeleide wil berekenen. Indien je h wil verkleinen, kan je dit door aan het commando een parameter toe te voegen, bijvoorbeeld nDerive(Y1,X,1,0.00001).







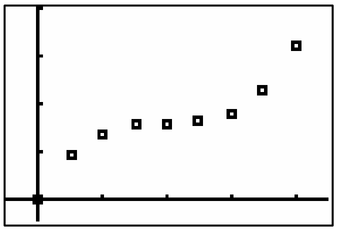
Bij het uitvoeren van experimenten beschikken we meestal over discrete data. Beschouw de volgende data:

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$x(t)$	0	4.62	7	7.87	8	8.12	9	11.37	16

Tabel 2

a. Plaats de bovenstaande data in de lijsten L1 en L2.

b. Maak een scatterplot van L2 t.o.v. L1.



We gebruiken differentiequotiënten als maat voor verandering en stellen ons de vraag waar de verandering het kleinst is.

De negen datapunten bepalen 8 intervallen waarover we een differentiequotiënt berekenen.

Van deze nieuwe data maken we als volgt een scatterplot.

Baserend op de formule $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x(t+h) - x(t-h)}{2h}$, met $h > 0$, nemen we als x-coördinaat het midden van het interval en als y-coördinaat het differentiequotiënt over het interval met h de helft van de lengte van het interval. Zo bekomen we:

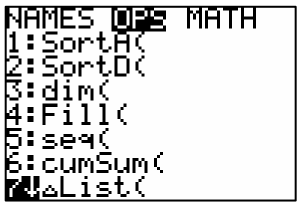
x_i	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.25	3.75
$\dfrac{\Delta x_i}{\Delta t}$	9.24	4.76	1.74	0.26	0.24	1.76	4.74	9.26

Tabel 3

Deze data laten aanvoelen dat de minimale verandering optreedt in het interval $[1.75, 2.25]$.

c. Plaats de x_i ’s in lijst L3 en definieer L4 = ΔList(L2) / ΔList(L1).

Het commando ΔList vind je via 2nd[LIST]<OPS> 7: ΔList en dit commando berekent de opeenvolgende verschillen van elementen van een lijst.



d. Maak een scatterplot van L4 t.o.v. L3 en controleer met TRACE waar de minimale verandering optreedt.

Een tweede test om na te gaan waar de verandering extreem is, is gebaseerd op de tweede orde differentiequotiënten. Dit zijn de differentiequotiënten van de reeds berekende differentiequotiënten. Voor de gegeven data geldt:

x_i	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
$\frac{\Delta^2 x_i}{\Delta^2 t}$	-8.96	-6.04	-2.96	-.04	3.04	5.96	9.04

Tabel 4

Zonder wiskundig exact in detail te gaan, kunnen we zeggen dat daar waar de tweede orde differentiequotiënten van teken veranderen de verandering extreem is: maximaal indien van + naar – en minimaal indien van – naar +.

e. Contrueer ook voor deze data een scatterplot. Voer de x_i's in in een lijst L5 en plaats de differentiecoëfiënten in een lijst L6.
f. Maak een scatterplot van L6 t.o.v. L5 en controleer waar de tweede orde differentiecoëfficiënten van teken wisselen.

Deze test laat ook vermoeden dat de verandering minimaal is rond $t = 2$.

Het onderstaande programma DIFFS berekent voor data in de lijsten L1 en L2 de eerste (L3, L4) en tweede (L5, L6) orde differentiequotiënten. Dit programma kan gedownload worden via www.scholennetwerk.be → Wiskunde → Projecten.

Vanzelfsprekend moet het aantal elementen van L1 gelijk zijn aan dat van L2 opdat het programma uitvoerbaar is.

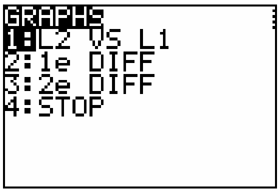
<u>DIFFS</u>

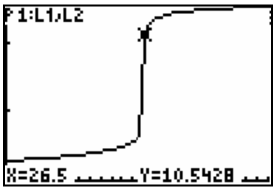
```
ClrList L3,L4,L5,L6
FnOff
dim(L1)→L

seq(.5(L1(N)+L1(N+1)),N,1,L-1,1)→L3
seq((L2(N+1)-L2(N))/(L1(N+1)-L1(N)),N,1,L-1,1)→L4

seq(.5(L3(N)+L3(N+1)),N,1,L-2,1)→L5
seq((L4(N+1)-L4(N))/(L3(N+1)-L3(N)),N,1,L-2,1)→L6

Lbl 1
5→Yscl
2→Xscl
Menu("GRAPHS","L2 VS L1",2,"1e DIFF",3,"2e DIFF",4,"STOP",E)

Lbl 2
PlotsOff
Plot1(xyLine,L1,L2,·)
max(L1)→Xmax
max(L2)→Ymax
0→Ymin
0→Xmin
Trace
Goto 1

Lbl 3
PlotsOff
Plot2(xyLine,L3,L4, ·)
max(L3)→Xmax
max(L4)→Ymax
 -.15*Ymax→Ymin
0→Xmin
Trace
Goto 1

Lbl 4
PlotsOff
Plot3(xyLine,L5,L6,·)
max(L5)→Xmax
max(L6)→Ymax
0→Xmin
min(L6)→Ymin
Trace
Goto 1

Lbl E
Return
```

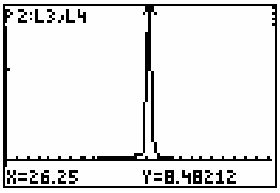
3. Voorbeeld 2 – Titratie

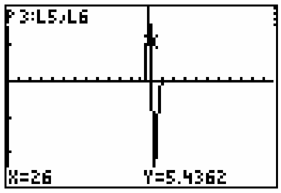
Plaats de data VOL en PH van een uitgevoerd titratie in de lijsten L_1 en L_2 en voer het programma DIFFS (PRGM) uit.

In het titratie- of evenwichtspunt is de verandering van pH in verhouding tot de toegevoegde volume base het grootst. Na het opstarten van DIFFS heb je deze keuze tussen drie grafieken die je met de cursor kunt onderzoeken.









Om van een grafiek terug te keren naar het menu, druk ENTER.

Controleer met DIFFS waar het evenwichtspunt optreed..