Dynamische processen
Zelfstudieopdracht 3

Bestudeer de volgende afleiding van een logistische groei.

De groei van een populatie levende organismen is een dynamisch proces (geboorte en sterfte). Het aantal geboorten in een tijdspanne Δt is rechtevenredig met het aantal levende organismen $N(t)$ en met de duur Δt : aantal geboorten = $\mu.N(t).\Delta t$.

Het aantal dat in een tijdspanne Δt sterft is rechtevenredig met het aantal en de tijdsduur: aantal sterfgevallen = $\nu.N(t).\Delta t$

Hieruit besluiten we: $N(t+\Delta t) = N(t) + \mu.N(t).\Delta t - \nu.N(t).\Delta t$.

Dit geeft als **differentievergelijking**: $\underbrace{\Delta N(t)}_{groei\ in\ \Delta t} = (\mu - \nu).N(t).\Delta t$.

Voor de gemiddelde groei per eenheid van tijd vinden we: $\dfrac{\Delta N(t)}{\Delta t} = (\mu - \nu).N(t)$.

Voor $\Delta t \to 0$ vinden we de ogenblikkelijke groei op het tijdstip *t*: $N'(t) = (\mu - \nu).N(t)$.

Deze vergelijking waarin $N'(t)$ voorkomt heet een **differentiaalvergelijking**. Deze vergelijking geeft de groeisnelheid op ieder ogenblik *t* en beschrijft een continu dynamisch proces, terwijl de differentievergelijking de groeiverandering weergeeft in bepaalde discrete tijdsintervallen.

Er zijn 3 mogelijkheden:

a. $\mu = \nu$: $\Delta N(t) = 0$,
b. $\mu > \nu$: de populatie groeit,
c. $\mu < \nu$: de populatie sterft uit.

Noem gemakshalve $\mu - \nu = \lambda$ en kies Δt = 1 als tijdseenheid.

$$\begin{aligned} N(t+1) &= N(t) + \lambda.N(t) = (1+\lambda).N(t) = \varphi.N(t) \qquad\qquad (1+\lambda = \varphi) \\ &= \varphi.\varphi.N(t-1) = \varphi^2.N(t-1) \\ &= \varphi^2.\varphi.N(t-2) = \varphi^3.N(t-2) \\ &= .... \\ &= \varphi^{t+1}.N_0 \end{aligned}$$

Dit noemt men het exponentieel groeimodel van Thomas Robert Malthus (1766-1834).

Voor $\lambda > 0, \lambda < 0, \lambda = 0$ geldt respectievelijk φ > 1, φ < 1 , φ = 1 m.a.w. een steeds stijgende, een steeds dalende of geen groei.

Model van Pierre François Verhulst (1804-1849) – **Logistische groei**

Om een meer realistisch model te hebben nemen we aan dat de populatie vanaf een bepaalde omvang niet meer exponentieel groeit omwille van te weinig ruimte, te weinig voedsel, …

Dit betekent dat λ in de differentievergelijking niet langer een constante is maar afhankelijk is van $N(t)$.

De meest eenvoudige hypothese is dat λ lineair afhankelijk is van $N(t): \lambda = c(M - N(t))$.

M is de maximale populatieomvang en c is een evenredigheidsfactor bepaald door omgevingsfactoren zoals ruimte, voedselvoorraad, ...

Bij groei van de populatie is $\lambda > 0 \Rightarrow c > 0$.

Bij $M = N(t)$ is er geen groei meer.

De recursieve vergelijking is dan: $N(t+1) = N(t) + \lambda N(t) = N(t) + c(M - N(t))N(t)$.

Als $N(t)$ toeneemt zal $M - N(t)$ afnemen, wat betekent dat de groei wordt afgeremd.

Als differentievergelijking bekomen we:

$$\begin{aligned}
\Delta N(t) &= c(M - N(t))N(t) \\
&= cMN(t) - cN(t)^2 \qquad \text{Stel } cM = a \Rightarrow \frac{a}{c} = M. \quad (1) \\
&= aN(t) - cN(t)^2 \\
&= aN(t)(1 - \frac{c}{a}N(t)) \\
&\underset{(1)}{=} aN(t)(1 - \frac{N(t)}{M})
\end{aligned}$$

Voor bijvoorbeeld M = 10 000 is $a = 10000\ c \Rightarrow a >> c$.

Delen van beide leden door M geeft relatieve cijfers voor de populatie: $\frac{N(t)}{M} = x(t)$ zodat $\Delta x(t) = ax(t)(1 - x(t))$ (of anders genoteerd: $\Delta x_n = ax_n(1 - x_n)$).

Uit $N(t + \Delta t) = N(t) + c(M - N(t))N(t)\Delta t$ volgt dat $\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = cN(t)(M - N(t))$

zodat $N'(t) \approx cN(t)(M - N(t))$; hetgeen weer een differentiaalvergelijking is.