2. Complexe iteratie

2.1 Julia-verzamelingen

In 1918 publiceerde Gaston Julia (1893-1978) een meesterwerk over iteraties van rationale functies. Hij kan beschouwd worden als één van de voorvaders van de tak van de wiskunde die men de dag van vandaag Dynamische Systemen noemt.

Een onderdeel van zijn werk bestond uit de studie van het dynamische gedrag van de complexe functies
$F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}: z\mapsto z^2+c$ met $c\in\mathbb{C}$.

We bekijken eerst het eenvoudige geval $F(z)=z^2$.

Gebruikmakend van de goniometrische vorm, $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, van een complex getal zie je snel dat het kwadrateren van het complex getal z meetkundig niets anders betekent dan het kwadrateren van de afstand r van z tot de oorsprong en het verdubbelen van de bijhorende hoek α (op een veelvoud van 2π na).

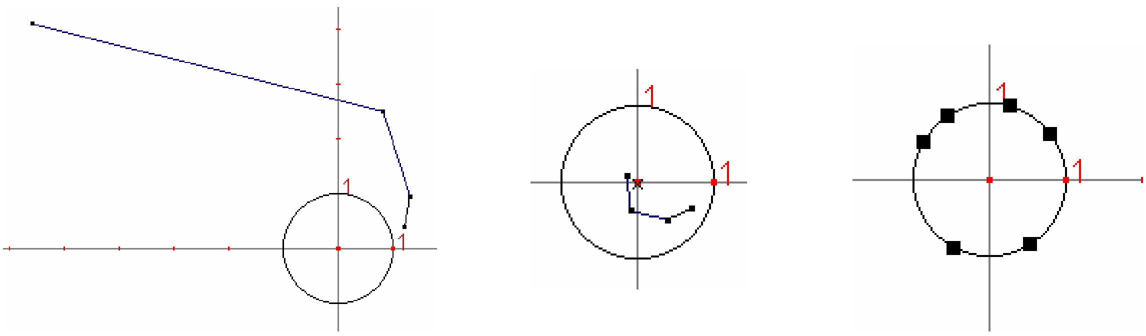
Iteratie van de functie $F(z)=z^2$ genereert voor een punt $z\in\mathbb{C}$ de volgende baan:

$$z_0=z, z_1=F(z_0)=z^2, z_2=F(z_1)=z^4, z_3=F(z_2)=z^8,\ldots, z_n=z^{2^n},\ldots$$

De volgende tabel beschrijft de iteratie in drie verschillende punten.

	r	α	r	α	r	α
z	0,4	10°	1	125°	2	35°
z^2	0,16	20°	1	250°	4	70°
z^4	0,0256	40°	1	140°	16	140°
z^8	$6,5536.10^{-4}$	80°	1	280°	256	280°
z^{16}	$4,29.10^{-7}$	160°	1	200°	65536	200
z^{32}	$1,84041.10^{-13}$	320°	1	40°	4294967296	40

Deze tabel illustreert mooi het dynamische gedrag van de functie $F(z)=z^2$.



Een startwaarde binnen de eenheidscirkel ($|z|<1$) heeft een baan die convergeert naar de oorsprong. Een startwaarde op de eenheidscirkel ($|z|=1$) genereert een baan die steeds op de eenheidscirkel blijft. En indien we de iteratie starten buiten de eenheidscirkel, zal de baan iedere cirkel rond de oorspong verlaten. Men noemt de baan dan onbegrensd.

Het dynamisch gedrag van $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}: z\mapsto z^2$ vertoont een sterke overeenkomst met het gedrag van de reële functie $F: x\mapsto x^2$ (zie Deel 1 - paragraaf 2.4).

De functie $F(z)=z^2$ verdeelt het complexe vlak in twee gebieden.

Een eerste gebied bestaat uit punten waarvan de baan onbegrensd is en een tweede gebied uit punten waarvan de baan begrensd is. We noemen een baan begrensd indien er een cirkel bestaat waarin alle punten van de baan liggen.

De grens tussen deze twee gebieden, de eenheidscirkel, noemt men de Julia-verzameling van de functie $F(z)=z^2$.

In het algemeen geeft iteratie met een functie $F(z)=z^2+c$, $c\in\mathbb{C}$, voor ieder complex getal z een baan:

$$z\mapsto z^2+c\mapsto (z^2+c)^2+c\mapsto ((z^n+c)^2+c)^2+c\mapsto (((z^n+c)^2+c)^2+c)^2+c\mapsto ....$$

Deze baan voldoet steeds aan één van de twee volgende eigenschappen.

- De baan is *onbegrensd*, d.w.z. de elementen van de baan verlaten iedere cirkel rond de oorsprong.
- De baan is *begrensd*, d.w.z. dat de elementen van de baan steeds in een cirkel met een bepaalde straal rond de oorsprong blijven.

Het is niet zo moelijk in te zien dat de verzamelingen van complexe getallen die aan één van bovenstaande eigenschappen voldoen niet leeg zijn.

Namelijk voor iedere $c\in\mathbb{C}$ heeft de vergelijking $F(z)=z^2+c=z$ een oplossing in $\mathbb{C}$. M.a.w. er bestaat steeds een vast punt.

Kies voor iedere $c\in\mathbb{C}$ een complexe getal z zodat $|z|>\max\{|c|,2\}$. Dan geldt:

$$|z^2|=|z^2+c-c|\leq|z^2+c|+|c|\Rightarrow|F(z)|=|z^2+c|\geq|z^2|-|c|\ .$$

Daar we z gekozen hebben zodat $|z|>|c|$, bekomen we:

$$\begin{aligned}|F(z)|&>|z^2|-|c|\\&>|z|^2-|z|\\&=|z|(|z|-1)\end{aligned}$$

En vermits $|z|>2$ bestaat een $a>0$ zodat $|z|-1>1+a$.

Hiervan gebruikmakend vinden we dat $|F(z)|>(1+a)|z|>|z|$. Voorgaande redenering geldt voor iedere iteratiestap zodat voor iedere n geldt dat $|F^n(z)|>(1+a)^n|z|$. Dit geeft dat de baan van z met $|z|>\max\{|c|,2\}$ naar oneindig vlucht en niet begrensd is.

Zo bewezen we dat de verzameling van punten waarvoor de baan onbegrensd niet leeg is.

DE ESCAPE-STELLING

Voor $F(z)=z^2+c$ met $|z|\geq|c|>2$ geldt dat $|F^n(z)|\to+\infty$ als $n\to+\infty$.

Uit de Escape-stelling volgt dat indien $|c|>2$ dat de baan van 0 vlucht naar oneindig, nl. de baan van 0 voor $F(z)=z^2+c$ wordt gegeven door $0\to c\to F(c)\to F^2(c)\to .....$ en is na één stap gelijk aan de baan van c. De baan van nul wordt de kritieke baan van F genoemd.

Bovendien geldt dat indien er een $k>0$ bestaat zodat $|F^k(z)|>\max\{|c|,2\}$ dat $|F^n(z)|\to+\infty$ als $n\to+\infty$.

De verzameling van complexe getallen die voldoen aan de tweede eigenschap noemt men de uitgebreide Julia-verzameling van de functie $F(z) = z^2 + c$. Wiskundig definieert men de Julia-verzameling van de functie $f(z) = z^2 + c$ als de rand van de uitgebreide Julia-verzameling. Intuïtief betekent dit dat de Julia-verzameling de grens aangeeft tussen de punten waarvan de baan begrensd blijft en de punten waarvan de baan naar oneindig gaat.

In wat volgt noemen we de uitgebreide Julia-verzameling gewoon de Julia-verzameling.

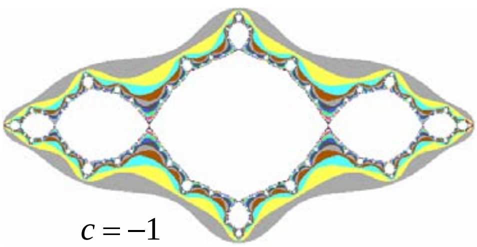
Voorgaande eigenschappen laten toe een algoritme op te bouwen om de Julia-verzameling, behorende bij $F(z) = z^2 + c$, te tekenen.

Kies het maximum uit te voeren iteratiestappen, N. Ieder pixel, $z_0 = (a,b)$, van het scherm kan beschouwd worden als een complex getal. Bereken voor dit pixel maximaal de eerste N iteraties. Indien er een $k \le N$ is waarbij $F^k(z_0) > \max\{|c|, 2\}$ kunnen we de iteratie stoppen en besluiten dat z_0 niet behoort tot de Julia-verzameling. We kleuren het pixel bijvoorbeeld wit. Indien de grens $\max\{|c|, 2\}$ na N iteratiestappen niet is overschreden, veronderstellen we dat z_0 wel behoort tot de Julia-verzamelingen en kleuren het pixel zwart.

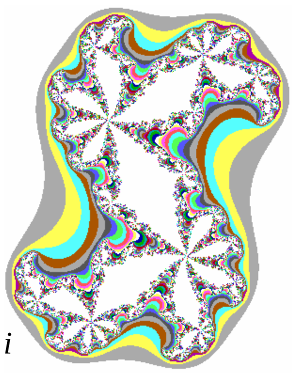
Om een iteratiestap uit te voeren op een pixel (a,b) met $F(z) = z^2 + c$ bepalen we het volgend punt $(a^2 - b^2, 2ab)$.

Vanzelfsprekend is dit maar een benadering omdat voor sommige punten er meer dan N iteraties nodig zijn om na te gaan of de grens al dan niet wordt overschreden. Kleuren kunnen aan de Julia-verzameling toegevoegd worden door de pixel in te kleuren i.f.v. van het aantal nodige stappen om de grens te oveschrijden.

Voor $c = 0$ is de Julia-verzameling een schijf met straal 1 rond de oorsprong maar voor $c \ne 0$ is de Julia-verzameling niet meer een zo voor de hand liggende figuur, maar een fractaalachtige figuur. Hieronder vind je twee afbeeldingen van twee Julia-verzamelingen horende bij een functie $F(z) = z^2 + c$ met $c \ne 0$.



$c = -1$

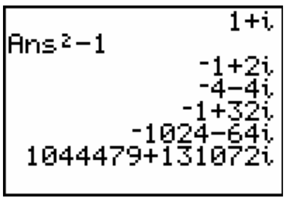


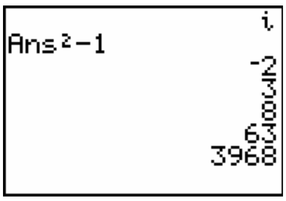
$c = 0.397 - 0.214i$

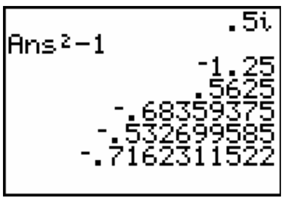
2.2 Analyse van de banen

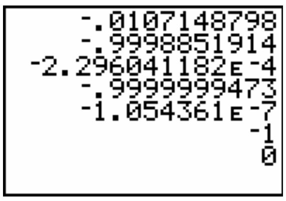
De grafische rekenmachine is een handige tool om numeriek een beeld te creëren van complexe banen. We bekijken enkele banen voor de functie $F(z) = z^2 - 1$.

Uit Deel 1 – paragraaf 2.2 weten we dat voor F het punt 0 een 2-cyclus bepaalt.

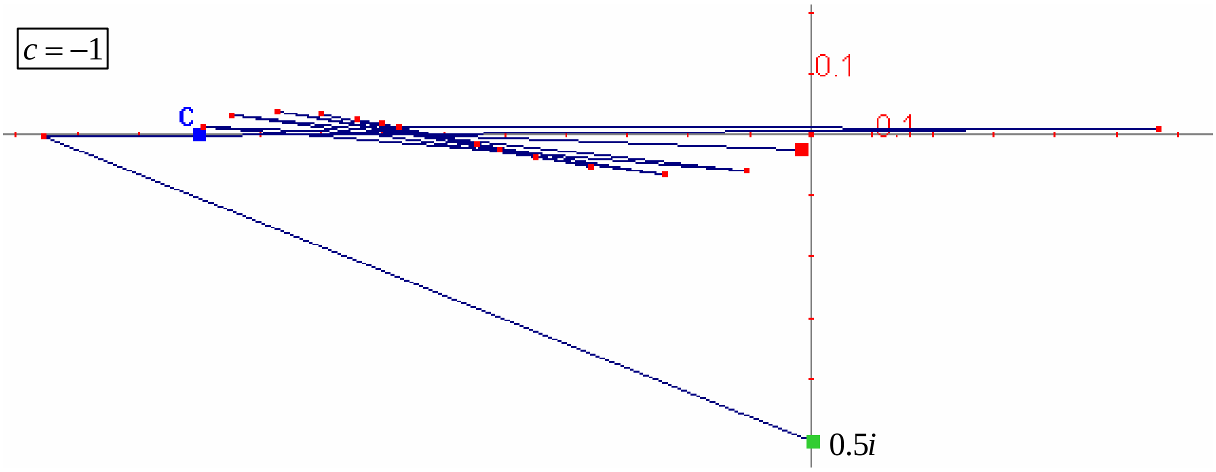








Gebruikmakend van dynamische meetkundesoftware, zoals Cabri, kunnen we ons ook grafisch een idee vormen van bepaalde banen.



Voor de constructie van deze figuren binnen cabri, kan je de appendix Complexe getallen met Cabri raadplegen.

2.3 De Mandelbrot-verzameling

In zijn meesterwerk bewees Julia dat de Julia-verzamelingen behorende bij de functies $F(z) = z^2 + c$ ofwel samenhangend zijn ofwel totaal onsamenhangend, waarschijnlijk zonder de fractaalachtige figuren die hij creëerde ooit zelf gezien te hebben.

Bovendien bewees hij dat de Julia-verzameling samenhangend is indien de baan van 0 begrensd is en totaal onsamenhangend indien de baan van 0 onbegrensd is.

Een samenhangende verzameling is een verzameling die uit één stuk bestaat; zoals bijvoorbeeld de eenheidsschijf of de voorgaande figuren. Zonder verder uit te weiden bestaat een totaal onsamenhangende verzameling uit oneindig veel stukken. Zo'n verzameling kan gevisualiseerd worden door een wolk van punten waarbij er geen enkele twee punten mekaar raken en waarbij er in de omgeving van ieder punt er zich oneindig veel punten van dat punt verwijderen. In de literatuur spreekt men van een Cantor-verzameling.

Uit deze eigenschap volgt dat er geen Julia-verzameling, behorende bij $F(z) = z^2 + c$, bestaat die bijvoorbeeld samengesteld is uit vijf stukken.

Het werk van Julia geraakte in de vergeethoek tot in 1945 de oom van Benoit Mandelbrot (1924-) hem het werk van Julia voorstelde. Mandelbrot toonde oorspronkelijk geen interesse in het werk van Julia tot dat in 1977 zijn eigen onderzoek hem terug naar het werk van Mandelbrot leidde. Aan de hand van computerexperimenten toonde Mandelbrot dat het werk van Julia een bron is van heelwat prachtige fractalen.

De Mandelbrot-verzameling is als volgt gebaseerd op het dynamisch gedrag van de functies $F(z) = z^2 + c$ met $c \in \mathbb{C}$.

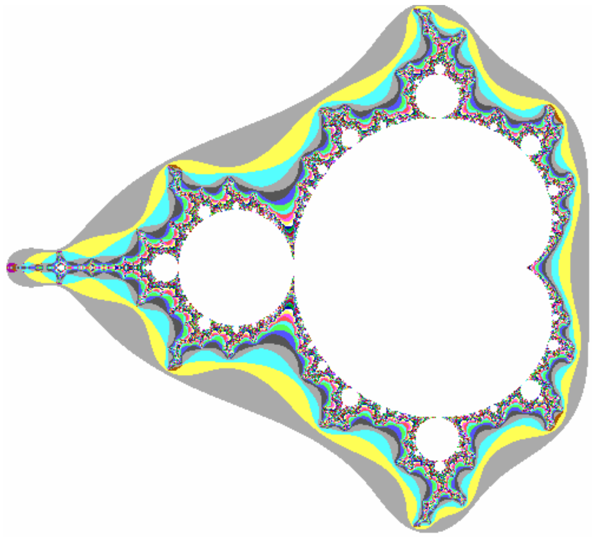
De idee van Mandelbrot was de dichotomie van Julia grafisch voor te stellen. Voor iedere $c \in \mathbb{C}$ bestudeerde hij, per computer, de baan van 0 onder iteratie met $f(z) = z^2 + c$:
$0 \mapsto c \mapsto c^2 + c \mapsto (c^2 + c)^2 + c \mapsto \ldots$ of $c \mapsto c^2 + c \mapsto (c^2 + c)^2 + c \mapsto \ldots$.

Voor $c = i$ is de baan van 0 gegeven door $0 \mapsto i \mapsto -1 + i \mapsto -i \mapsto -1 + i \mapsto -i \mapsto \ldots$., convergentie naar een 2-cyclus.

Voor $c = 2i$ wordt de baan van 0 $0 \mapsto 2i \mapsto -4 + 2i \mapsto 12 - 14i \mapsto -52 - 334i \mapsto \ldots$, m.a.w. de baan van 0 zal zich steeds verder en verder verwijderen van de oorsprong.

De Mandelbrot-verzameling bestaat uit deze c-waarden waarvoor de baan van 0 begrensd blijft, m.a.w. deze c-waarden waarvoor de bijhorende Julia-verzameling samenhangend is.

Door dit procédé te vertalen naar een computeralgoritme bekwam B. Mandelbrot de onderstaande figuur.



De idee achter het algoritme is gelijkaardig aan dit voor het genereren van een Julia-verzameling. Voor ieder pixel, $c \in \mathbb{C}$, wordt de computer gevraagd na te gaan of de baan van nul naar oneindig gaat of niet. In het tweede geval wordt het pixel wit gekleurd, in het andere geval wordt een andere kleur gebruikt.

Uit de Escape-stelling volgt dat de complexe getallen die tot de Mandelbrot-verzameling op een afstand kleiner of gelijk aan 2 van de oorsprong liggen.

Merk op dat ook hier de afbeelding slechts een benadering is van de Mandelbrot-verzameling daar de computer slechts een eindig aantal iteraties kan uitvoeren.

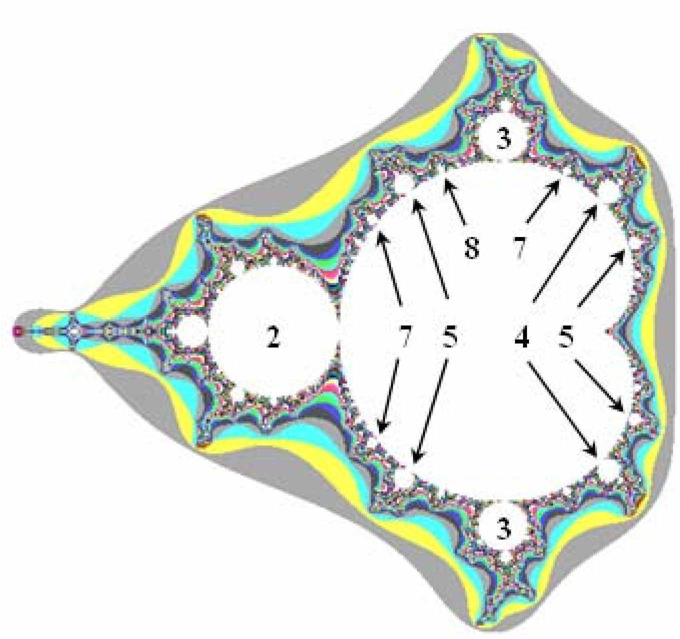
Het bestuderen van de baan van 0 voor verschillende $c \in \mathbb{C}$ kan met de Java applet Mandel op www.scholennetwerk.be → wiskunde → Projecten.

2.3.1 Periode van de Mandelbrot-bollen

Bij het gedetailleerder bekijken van de Mandelbrot-verzameling zien we dat de Mandelbrot-verzameling opgebouwd is uit vele kleine decoraties van allerhande verschillende vormen. De decoraties die rechtstreeks verbonden zijn met het solide hart van de Mandelbrot-verzameling noemen we de primaire bollen.

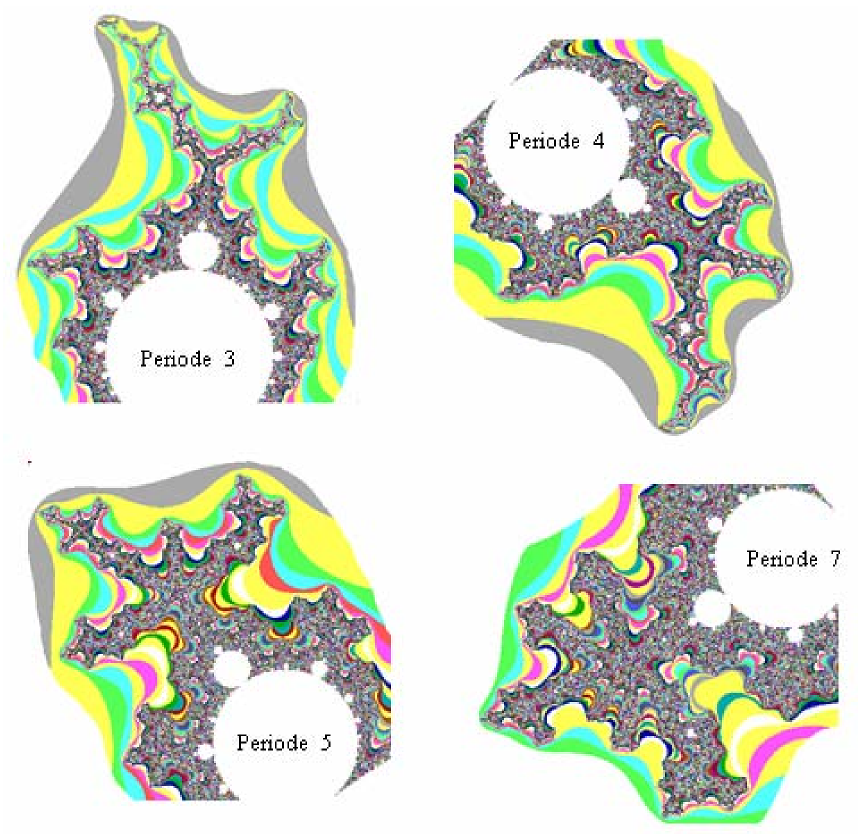
Indien een punt c ligt in het inwendige van een primaire bol dan wordt de baan van 0 aangetrokken tot een n-cyclus $(n \in \mathbb{N})$. Dit getal n is hetzelfde voor alle complexe getallen in eenzelfde primaire bol. Het getal n noemen we de periode van de primaire bol.

Op deze manier kan men aan iedere primaire bol een getal n hechten, nl. de periode. Zo bekomen we de volgende figuur.

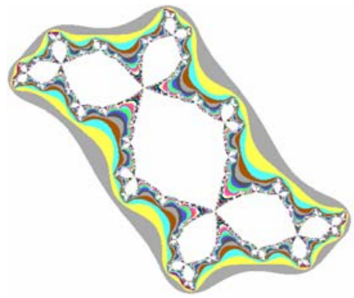


Aan de primaire bollen zijn er kleinere decoraties gehecht die lijken op antennes. De hoofd-antenne van iedere decoratie lijkt dan weer opgebouwd te zijn uit een aantal tentakels. Het dynamische gedrag van $F(z) = z^2 + c$ staat in nauw verband met het aantal tentakels van deze antennes.

A.h.v. vergrotingen van de primaire bollen kan men controleren dat het aantal tentakels van de grootste antenne gehecht aan de primaire bol gelijk is aan de periode van de primaire bol. Hieronder vind je enkele vergrotingen van primaire bollen van periode 3, 4, 5, en 7.



2.3.2 Periode versus Julia-verzamelingen



Een tweede manier om de periode van de primaire bollen te bepalen, maakt gebruik van Julia-verzamelingen.

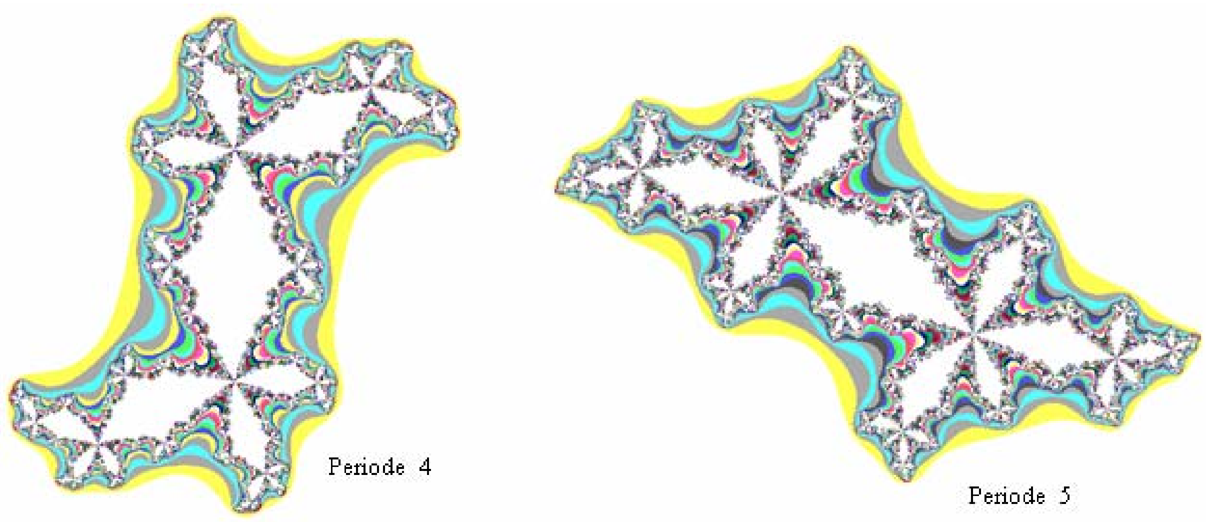
Hiernaast vind je de Julia-verzameling voor $c = -0.122 + 0.744i$. Deze Julia-verzameling noemt men het konijn van Douady. Met enige verbeelding lijkt deze figuur op een fractaalachtig konijn. Het konijn is opgebouwd uit een centraal lichaam waaraan er twee oren zijn bevestigd. Maar overal waar je ook kijkt, vind je zo'n een aanhechting van twee oren.

We kunnen dit formuleren door te zeggen dat de Julia-verzameling oneindig veel verbindingspunten heeft waarin er telkens 3 verschillende delen van de Julia-verzameling met elkaar in verbinding staan.

Hoewel deze Julia-verzameling er redelijk ingewikkeld uitziet, is ze toch samenhangend.

Dat in ieder verbindingspunt juist drie delen met elkaar verbonden worden, kan ons feitelijk niet verrassen daar $c = -0.122 + 0.744i$ ligt in een primaire bol met periode 3.

Het is opnieuw een fascinerend feit dat voor alle c-waarden die je kiest in eenzelfde primaire bol met periode n de Julia-verzameling een samenhangende verzameling is met oneindig veel verbindingspunten waarbij er in ieder verbindingspunt juist n verschillende delen met elkaar verbonden worden. We illustreren dit voor de periode 4 en 5.



2.3.3 Rotatiegetallen

Het is mogelijk aan iedere primaire bol een rationaal getal $\frac{p}{q}$ te hechten. Voor de noemer q van dit rationaal getal nemen we de periode van de primaire bol. Het definiëren van de teller p kan op verschillende manieren.

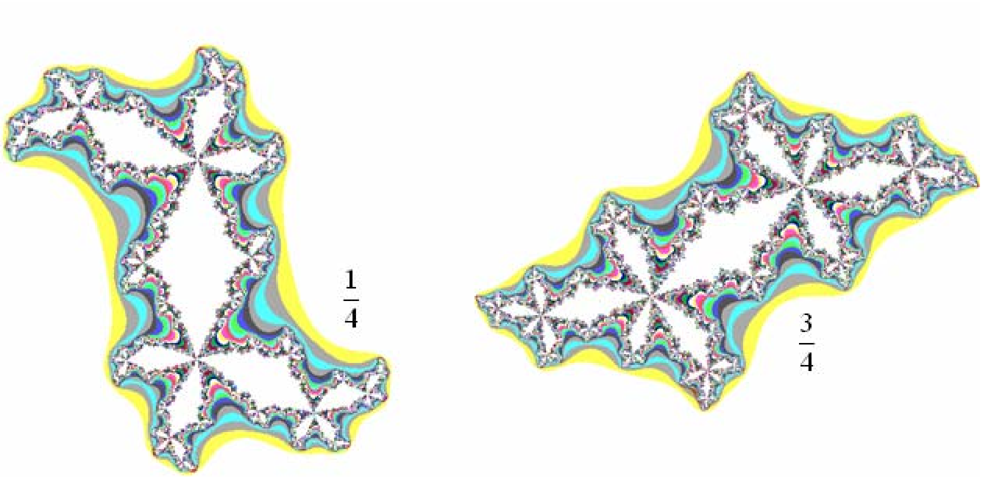
Een eerste methode bestaat erin voor een willekeurige $c \in \mathbb{C}$, in een primaire bol met periode $q > 1$, de hierbij horende Julia-verzameling te bepalen en de aantrekkende q-cyclus bovenop de Julia-verzameling te plaatsen. Deze cyclus zal dan in q-componenten van het inwendige van de Julia-verzameling liggen. Deze cyclus zal bij iedere iteratiestap met de functie $F(z) = z^2 + c$ juist p componenten in tegenwijzerszin verder springen.

M.a.w. de cyclus roteert rond het verbindingspunt met $\frac{p}{q}$ omwentelingen in tegenwijzerszin.

Op die manier definieert de breuk $\frac{p}{q}$ een soort van rotatiegetal.

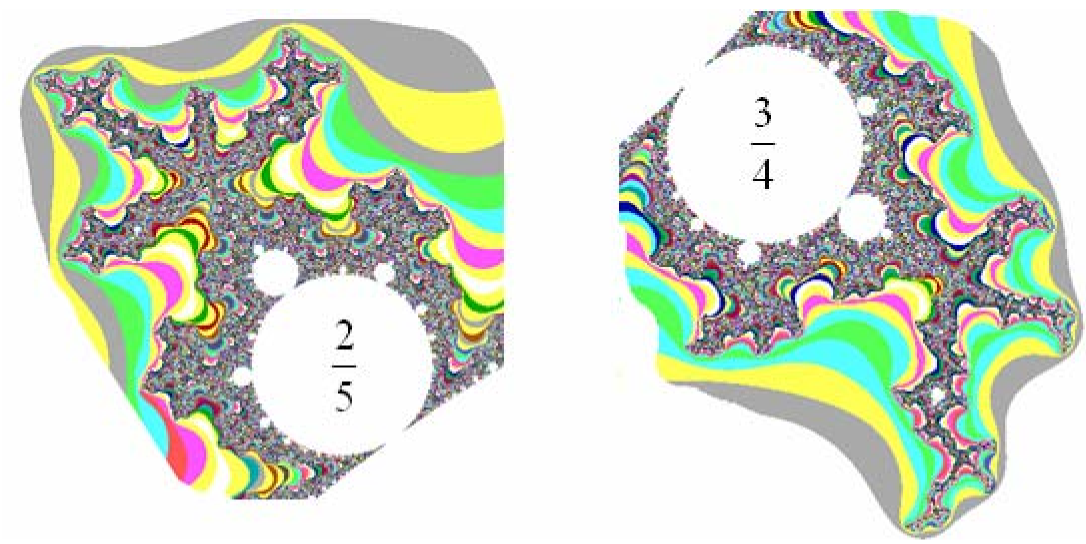
Een meer practische methode, maar minder exacte, voor de bepaling van p is de volgende. Bepaal de Julia-verzameling, behorende bij $c \in \mathbb{C}$ gelegen in een primaire bol met periode q. In ieder verbindingspunt worden q componenten aan elkaar gehecht. Beschouw in zo'n verbindingspunt de grootste component en zoek de kleinste van de overige componenten.

Indien we in tegenwijzerszin de componenten ordenen rond het verbindingspunt, ligt de eerst volgende kleinste component juist p stappen verder in deze ordening. We verduidelijken met enkele voorbeelden.



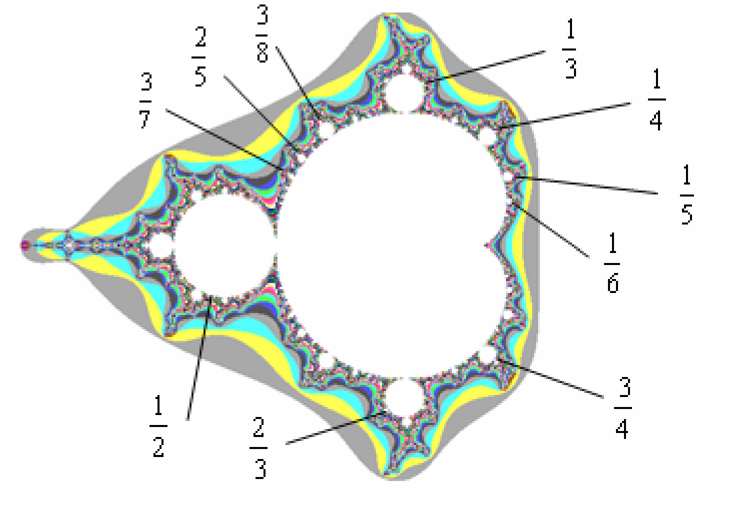
Het probleem bij deze methode is het bepalen van de kleinste component. Het is meestal onmogelijk om de oppervlakte van deze componenten expliciet te berekenen. Voor grote q-waarde is deze methode praktisch onbruikbaar.

Een derde, nog onnauwkeurigere, methode maakt gebruik van de antennes die aan de primaire bol gehecht zijn. Voor de meeste bollen is de kleinste tentakel juist $\frac{p}{q}$ omwentelingen in tegenwijzerszin verwijderd van de hoofdantenne. Twee voorbeelden:



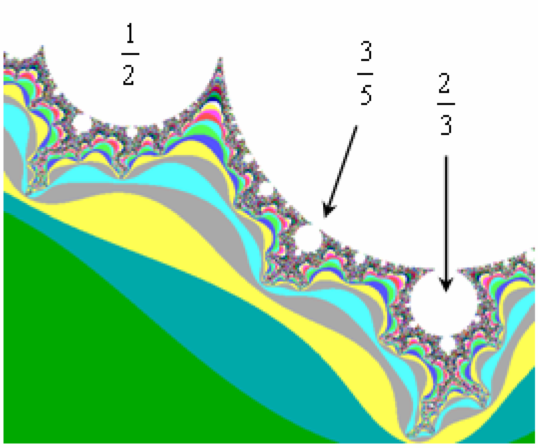
2.3.4 Optelling van de rotatie-getallen

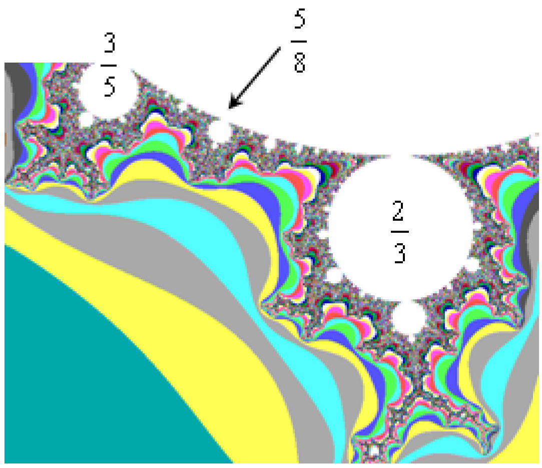
Met bovenstaande methoden vinden we de volgende figuur.



Experimenteel kan nagegaan worden dat er voor ieder rationaal getal tussen 0 en 1 een unieke primaire $\frac{p}{q}$-bol bestaat en dat de primaire bollen zich rond het solide hart van de Mandelbrot-verzameling ordenen zoals de rationale getallen in $[0,1]$.

Een andere zeer merkwaardige eigenschap van de rotatie-getallen is geïllustreerd in de volgende figuur. Op de figuur links bevindt zich onderaan een $\frac{2}{3}$-bol en links een $\frac{1}{2}$-bol. De grootste bol tussen deze twee bollen is een $\frac{3}{5}$-bol. We bekomen het rotatie-getal van de grootste primaire bol tussen de $\frac{2}{3}$-bol en de $\frac{1}{2}$-bol door optelling van de noemers en optelling van de tellers, m.a.w. het optellen van rationale getallen zoals de leerlingen het al jaren wensen. Deze optelling is in de getaltheorie bekend als de Farey-optelling.



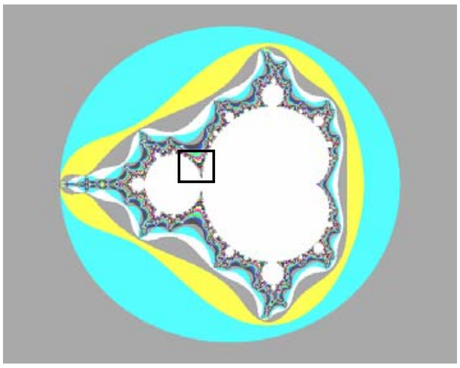


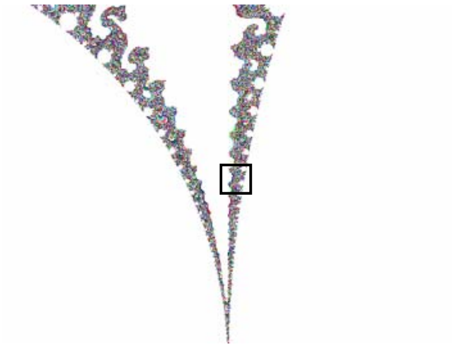
Deze optelling wordt ook gebruikt voor het optellen van scores. Een leerling haalt bijvoorbeeld $\frac{3}{5}$ op vraag 1 en $\frac{4}{5}$ op vraag 2, een totaal van $\frac{7}{10}$.

2.3.5 De Mandelbrot-verzameling: een artistiek medium

De Mandelbrot-verzameling is een voedingsbodem voor tal van artistieke computer graphics. Overtuig jezelf door de Mandelbrot-verzameling te exploiteren, bijvoorbeeld door middel van de freeware FractInt (www.spanky.triumf.ca). Hieronder vind je enkele uitvergrotingen van de rand van de Mandelbrot-verzameling.

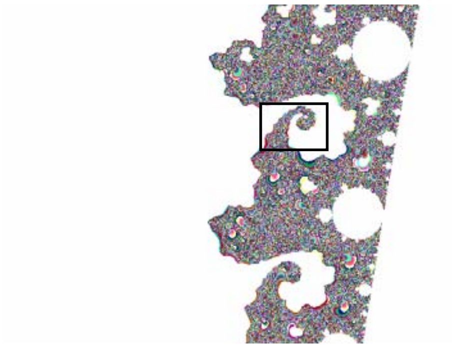
1

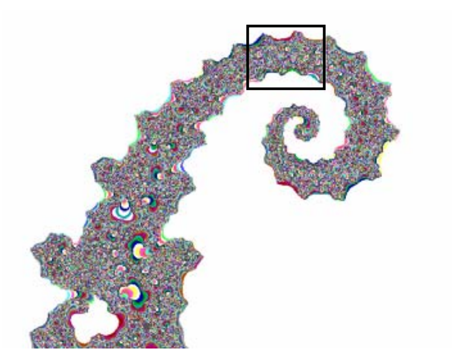




2

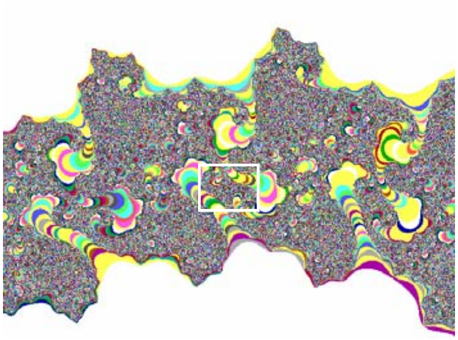
3

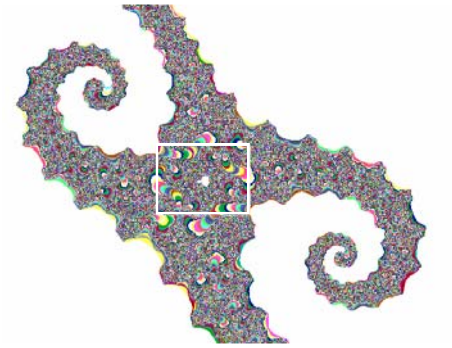




4

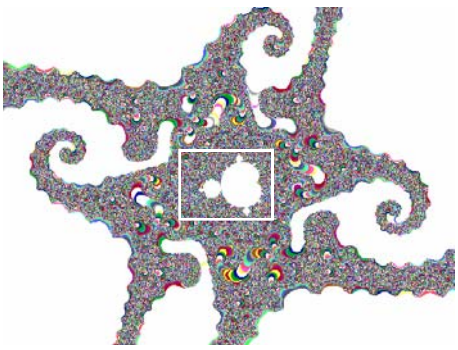
5

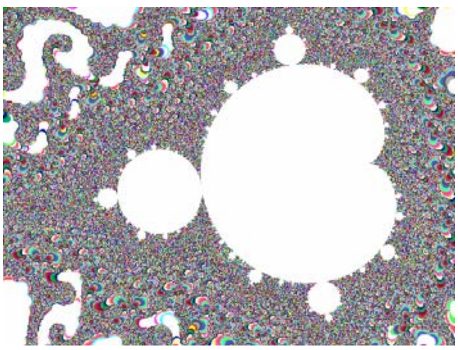




6

7





8