1. Differentiaalvergelijkingen

1.1 Van discreet naar continu

We bestuderen de evolutie van de bevolking van een land met 15 miljoen inwoners.

Stel u_n het aantal inwoners na n jaar, met n een discrete variabele. We hebben enkel informatie over bevolkingsaantallen op het einde van een jaar.

Met een rij, $u_0 = 15 \to u_1 \to u_2 \to u_3 \to ... \to u_n \to ...$, kunnen we de bevolkingsgroei modelleren.

We stellen de volgende hypothese.

De jaarlijkse aangroei, in jaar n, is evenredig met de bevolkingsgrootte op het einde van jaar $n-1$: $\Delta u_{n-1} \sim u_{n-1}$. Wanneer de bevolking zich kan ontwikkelen bij voldoende ruimte en wanneer er geen invloeden zijn van buitenaf dan is dit een zinvolle hypothese, 2 keer zoveel volk, twee keer zoveel groei.

Uit de meting van Δu_0, aangroei in het 1^e jaar, blijkt dat de evenredigheidsfactor gelijk is aan 0,03 en we nemen aan dat dit de jaren nadien zo blijft.

Veralgemening geeft $\Delta u_{n-1} = 0,03 \cdot u_{n-1}$ zodat $u_n - u_{n-1} = 0,03 \cdot u_{n-1}$ waaruit volgt dat $u_n = 1,03 \cdot u_{n-1}$. Deze recursievergelijking heeft als algemene oplossing de rij met expliciet voorschrift $u_n = 1,03^n \cdot u_0$ waarbij 1,03 de jaarlijkse groeifactor is.

Voor elke waarde van u_0 is er één oplossing. De recursievergelijking heeft dus oneindig veel oplossingen. Maar de recursievergelijking met beginvoorwaarde $u_0 = 15$ heeft als unieke oplossing de rij $u_n = 15.1,03^n$, die we een particuliere oplossing noemen.

In wat volgt modelleren we de bevolkingsevolutie met een functie y die afhankelijk is van een continue variabele t. We berekenen eerst de gemiddelde bevolkingsaangroei over delen van een jaar.

$\Delta t = 1$ maand

De aangroei kan uitgedrukt worden als volgt: $\Delta y = y(t + \frac{1}{12}) - y(t)$. De gemiddelde aangroei per maand wordt gegeven door $\dfrac{y(t+\frac{1}{12}) - y(t)}{\frac{1}{12}} = 0,03\, y(t)$.

Vergelijk met $\Delta u_{n-1} = u_n - u_{n-1} = u(n) - u(n-1) = 0,03 u_n$.

$\Delta t = 1$ dag

De gemiddelde aangroei wordt: $\dfrac{y(t+\frac{1}{360}) - y(t)}{\frac{1}{360}} = 0,03 \cdot y(t)$.

Een tijdsinterval van lengte Δt

We bekomen $\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=0,03y(t)$. We noteren $\Delta y=y(t+\Delta t)-y(t)$ zodat $\frac{\Delta y}{\Delta t}=0,03y(t)$. $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ is de gemiddelde aangroei over een periode Δx, de gemiddelde groeisnelheid.

We laten Δt zeer klein worden klein worden om zo een goede benadering te bekomen van de ogenblikkelijke groeisnelheid op een tijdstip t.

De ogenblikkelijke snelheid wordt gedefinieerd als $\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$ en noteren we met $\frac{dy}{dt}$ of $y'(t)$. De bevolkingsevolutie wordt beschreven door de vergelijking $y'(t)=0,03\cdot y(t)$.

Merk op dat in deze vergelijking zowel de functie y voorkomt als ook de afgeleide y'.

Zo'n vergelijking noemen we een differentiaalvergelijking.

De enige functie die evenredig is met zijn afgeleide is de exponentiele functie. Vandaar dat de differentiaalvergelijking als oplossing de functie $y(t)=15e^{0,03t}$ heeft.

Indien we geen beginvoorwaarde vooropstellen is iedere functie van de vorm $y(t)=Ae^{0,03t}$ een oplossing van de differentiaalvergelijking.

Ook hier heeft een beginvoorwaardeprobleem een unieke oplossing.

$y(t)=15e^{0,03t}$ is de unieke oplossing van $\begin{cases} y'(t)=0,03y(t), \\ y(0)=15 \end{cases}$

$y(t)=15e^{0,03t}$ noemen we een particuliere oplossing van $y'(t)=0,03y(t)$.

Merk op dat recursievergelijkingen of differentievergelijkingen beschouwd kunnen worden als de discrete tegenhangers van differentiaalvergelijkingen, net zoals rijen voor functies. Bij iteratieve processen is de tijd gemeten in discrete intervallen (dagen, jaren,…) en bij differentiaalvergelijkingen is de tijd een continue variabele. We bestuderen discrete systemen met als doel hun resultaten toe te passen in moeilijkere continue gevallen.

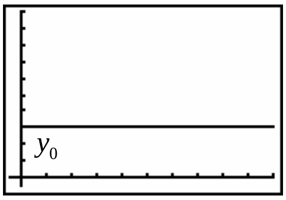
Een oplossing van een differentiaalvergelijking is een continue functie, vaak met als onafhankelijke variabele de tijd. Als we de oplossing bekijken op discrete tijdsintervallen, hebben we een iteratief proces.

De snelheid waarmee een grootheid verandert, is de afgeleide van de grootheid naar de onafhankelijke variable, bijvoorbeeld de tijd.

Soms is het onmogelijk of zeer moeilijk om differentiaalvergelijkingen expliciet op te lossen en maakt men gebruik van numerieke methoden. We zullen dit verderop illustreren met de methode van Euler.

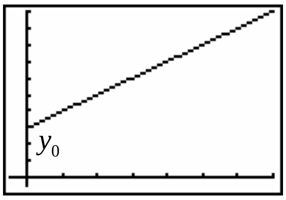
1.2 Enkele differentiaalvergelijkingen

We veronderstellen voor de onderstaande differentiaalvergelijkingen steeds de beginvoorwaarde $y(0) = y_0$ voor $t_0 = 0$.



(i) $\underline{y'(t) = 0}$

De oplossing voor dit beginvoorwaardenprobleem is $y(t) = y_0$.



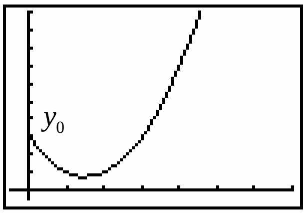
(ii) $\underline{y'(t) = a \neq 0}$

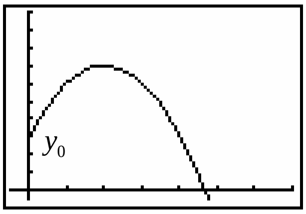
De afgeleide is constant ($\neq 0$) voor een eerstegraadsfunctie.

In dit geval is de oplossing $y(t) = at + y_0$.

(iii) $\underline{y'(t) = 2at + b \quad (a \neq 0)}$

De oplossing is de kwadratische functie $y(t) = at^2 + bt + y_0$.





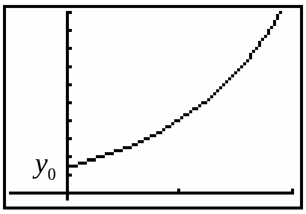
(iv) $\underline{y'(t) = a\,y(t) \quad (a \neq 0)}$

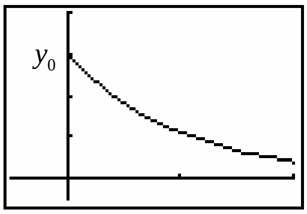
Zoals eerder gezegd is de enige functie waarvoor de afgeleide evenredig is met zichzelf de exponentiële functie.

Men kan bewijzen dat $y'(t) = y(t) \Leftrightarrow y(t) = Ce^t$ met C een constante.

Rekening houdend met de beginvoorwaarde bekomen we als oplossing voor $y'(t) = y(t)$ de exponentiële functie $y(t) = y_0\, e^t$.

Hiervan vertrekkende zien we snel in dat de oplossing van $y'(t) = a\,y(t)$ de functie $y(t) = y_0\, e^{at}$ is.





(v) $\underline{y'(t) = a\,y(t) + b}$

Indien we voor bovenstaande vergelijking enkel de termen beschouwen waar y of y' in voorkomen, krijgen we de vergelijking $y'(t) = a\,y(t)$. De vergelijking noemen we de homogene vergelijking. De algemene oplossingen hiervan kennen we, nl. $y(t) = Ce^{at}$.

Als we de vergelijking, $y'(t) = a\,y(t) + b$, aandachtig bestuderen zien we dat de functie $y(t) = -\dfrac{b}{a}$ een oplossing is. Deze oplossing noemen we een particuliere oplossing.

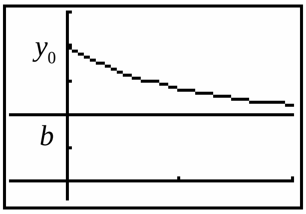
Wiskundig kan aangetoond worden dat indien we de oplossing kennen van de homogene vergelijking, y_h, en een particuliere oplossing, y_p, de algemene oplossing $y = y_h + y_p$ is.

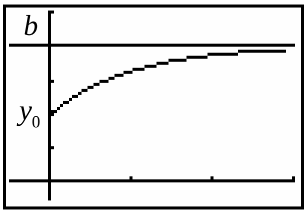
In ons geval geeft dit: $y(t) = Ce^{at} - \dfrac{b}{a}$.

Rekening houdend met de beginvoorwaarde, $y(0) = y_0$, vinden we $y_0 = y(0) = C - \dfrac{b}{a}$ zodat $C = y_0 + \dfrac{b}{a}$.

De oplossing van het beginvoorwaardenprobleem is $y(t) = (y_0 + \dfrac{b}{a})\,e^{at} - \dfrac{b}{a}$.

Deze differentiaalvergelijking wordt ook vaak in de vorm $y'(t) = a\,(b - y(t))$ genoteerd met als oplossing $y(t) = (y_0 - b)\,e^{-at} + b$. Enkele mogelijke oplossingen.



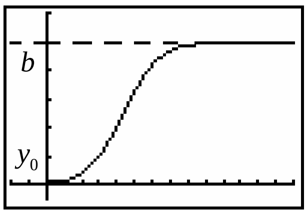


(vi) Als laatste type van differentiaalvergelijking bekijken we $y'(t) = \dfrac{a}{b}\,y(t)(b - y(t))$.

De oplossing van dit beginvoorwaardeprobleem is de functie $y(t) = \dfrac{b}{1 + \left(\dfrac{b}{y_0} - 1\right)e^{-at}}$.

Op de afbeelding hiernaast staat de grafiek van een mogelijke oplossing.

De grafiek van deze functie noemen we een S-kromme. Vergelijk deze differentiaalvergelijking met het discreet logistisch groeimodel.



1.3 Enkele voorbeelden

Voorbeeld 1
Verspreiding van een virus bij een populatie van 100 000 mensen.

Stel $y(t)$ het aantal mensen dat drager is van het virus op het tijdstip t en $y(0) = y_0$ de beginvoorwaarde.

De snelheid waarmee het virus zich uitbreidt op het tijdstip t is $y'(t) = \frac{dy}{dt}$.

We nemen aan dat deze snelheid evenredig is met het aantal dragers op het ogenblik t en met het aantal mensen dat op dat ogenblik nog geen drager is.

Hoe meer besmette personen hoe sneller het virus zich verspreidt, hoe minder er niet besmet zijn hoe minder snel er nog besmet kunnen worden.

De differentiaalvergelijking die dit proces beschrijft is van de vorm:
$y'(t) = 5.10^{-7}\,y(t).(100000 - y(t))$.

Het exact oplossen van deze differentiaalvergelijking is niet zo triviaal. Wel is deze differentiaalvergelijking van de vorm zoals in paragraaf 1.2 punt (vi). Maar ook daar hebben we niet uitgeweid over de oplossingsmethode.

Wel kunnen we benaderend terugwerken naar een recursievergelijking om numeriek voorspellingen te doen.

Theoretisch geldt dat $y'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{y(h) - y(0)}{h}$ hetgeen we kunnen benaderen door h klein genoeg te nemen, $y'(0) \approx \frac{y(0,1) - y(0)}{0,1} = 5 \cdot 10^{-7}\,y(0) \cdot (100000 - y(0))$. Zodat:

$y(0,1) \approx 5000 + 0,1 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 5000 \cdot (100000 - 5000) = 5023,75...$ Ook geldt:

$y(0,1) \approx -5 \cdot 10^{-8}(5000)^2 + 5000(1 + 5 \cdot 10^{-8} 10^5) = -5.10^{-8} \cdot (5000)^2 + 5000 \cdot (1,005)$

Noteren we $y(0.1) = y_1$, bekomen we $y_1 = -5 \cdot 10^{-8}\,{y_0}^2 + 1,005\,y_0$ met als veralgemening de recursievergelijking: $y_n = -5 \cdot 10^{-8}\,{y_{n-1}}^2 + 1,005\,y_{n-1}$.

Voorbeeld 2
Bacteriepopulatie

De toename van het aantal bacteriën is per tijdseenheid twee keer het aantal bacteriën en de afname is recht evenredig met het kwadraat van de aanwezige bacteriën.

Dit logistisch model wordt beschreven met de vergelijkjng $\frac{dy}{dt} = y'(t) = 2y(t) - k\,y(t)^2$.

Bij aanvang zijn er 5 bacteriën en er kunnen maximaal 400 zijn.

Bij de maximale waarde 400 is er geen groei zodat $0 = 2 \cdot 400 - k \cdot 400^2 \Rightarrow k = 0,005$.

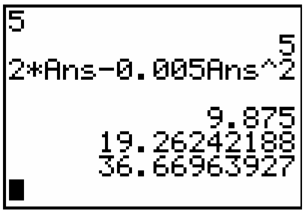
Gebruikmakend van k vinden we dat $y'(0) = 2 \cdot 5 - 0,005 \cdot 25 = 10 - 0,125 = 9,875$.

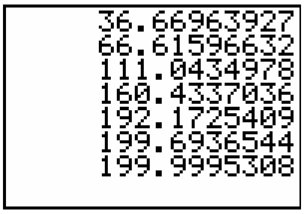
Zoals in voorbeeld 1 vinden we voor h gelijk aan één dag dat $y'(0) \approx \frac{y(1) - y(0)}{1}$.

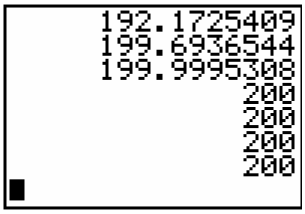
Hieruit volgt dat $y(1) = 2 \cdot y(0) - 0,005 \cdot y(0)^2 + y(0) = 14,875$.

Op een analoge manier vinden we dat $y(2) = 2 \cdot y(1) - 0,005 \cdot y(1)^2 + y(1) = 43,518...$

Hetgeen leidt tot de algemene differentievergelijking $\Delta y(n-1) = 2\,y(n-1) - 0,005.y(n-1)^2$







Voorbeeld 3
Mengprobleem

Om een huis te schilderen kan men niet de juiste tint kopen. Hiervoor koopt men gele en rode verf, een ton van 500 liter gele verf en een ton van 100 liter rode verf.

Beide tonnen zijn voorzien van een kraan die 100 liter per uur kan laten wegstromen.

Om een optimale geleidelijke mengeling van de verf te bekomen laten we de gele verf in de rode vloeien en wordt automatisch vermengd, d.m.v. een mengmachine, met de rode verf.

Bij het openen van beide kraantjes loopt dezelfde hoeveelheid rode verf als instromende gele weg.

We bestuderen de van de hoeveelheid gele verf in de ton met rode verf.

Voor een tijdsinterval, van een tijdsduur Δt, geldt dat $\Delta y \approx \underbrace{100 \cdot \Delta t}_{instroom} - \underbrace{y(t) \cdot \Delta t}_{uitstroom}$.

Door Δt voldoende klein te nemen, kunnen we veronderstellen dat de instroom gele verf constant is, $y(t) = y(t + \Delta t)$.

Zo bekomen we de verhouding $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} \approx 100 - y(t)$ hetgeen ons de volgende differentiaalvergelijking $y'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t} = 100 - y(t)$ oplevert met als beginvoorwaarde $y(0) = 0$.

De exacte oplossing van dit beginvoorwaardeprobleem is de functie $y(t) = -100e^{-t} + 100$.

Voor de gewenste tint moet $y(t) = 50$ waaruit we het tijdstip als volgt berekenen:

$$50 = 100 - 100e^{-t} \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \ln 2 = 0,6931...\text{uur} = 41'\ 35,32''$$

We benaderen deze oplossing numeriek.

Veronderstel eerst dat we meten in stappen van 6 minuten, 0,1 uur.

Weer geeft $y'(0) \approx \dfrac{y(0,1) - y(0)}{0,1}$ dat $y(0,1) \approx 0,1 \cdot 100 + 0 = 10$ en $\Delta y = y(0,1) - y(0) = 10$.

Analoog vinden we uit $\begin{cases} y'(0,1) = 100 - y(0,1) \\ y'(0,1) \approx \dfrac{y(0,2) - y(0,1)}{0,1} \end{cases}$ dat

$y(0,2) \approx 0,1(100 - y(0,1)) + y(0,1) = 0,1.(100 - 10) + 10 = 19$ en tussen 6 en 12 minuten een differentie $\Delta y = y(0,2) - y(0,1) = 9$.

Dit proces verderzettend, krijgen we de volgende resultaten:

# minuten	6	12	18	24	30	36	42	48
# liter gele verf	10	19	27,10	34,39	40,95	46,85	52,17	56,95
Δy	10	9	8.10	7,29	6,56	5,90	5,32	4,78

Tijdsintervallen van 6 minuten zijn echter te groot om goede benaderingen te bekomen. Metingen per minuut, 0,0166… uur geven nauwkeurigere resultaten. Dit vraagt wel heel wat meer rekenwerk.

# minuten	1	2	3	4	5	6	...	42
# liter gele verf	1,66	3,29	4,89	6,47	8,02	9,55	...	51,31

1.4 De methode van Euler

We behandelen de methode van Euler om een idee te geven wat het numeriek oplossen van differentiaalvergelijkingen betekent. Deze methode is in realiteit te onnauwkeurig maar illustreert heel mooi het numeriek idee. In de praktijk wordt gebruik gemaakt van andere gelijkaardige iteratieve processen als de Runga Kutta-methode.

We vetrekken van een algemeen beginvoorwaardeprobleem $\begin{cases} y'(t) = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ en gaan de de oplossing $y(t)$ numeriek benaderen op een interval $[a,b]$.

Als concreet voorbeeld behandelen we $\begin{cases} y'(t) = t \\ y(0) = 2 \end{cases}$ op het interval $[0,6]$.

Voor dit voorbeeld is $f(t,y) = t$

We zoeken een benaderende waarde voor $y(t)$ voor een aantal punten $t_0, t_1, t_2, ..., t_n$ in het interval $[a,b]$. Meestal worden deze punten equidistant gekozen zodat:

$t_i = t_0 + ih$ voor $i = 0,1,2,...,n$ met $h = \dfrac{b-a}{n}$.

In wat volgt noteren we $y(t_i) = y_i$.

De methode van Euler is gebaseerd op het volgende iteratieprincipe $y_{i+1} = y_i + h\, f(t_i, y_i)$ voor $i = 0,1,2,...,n-1$.

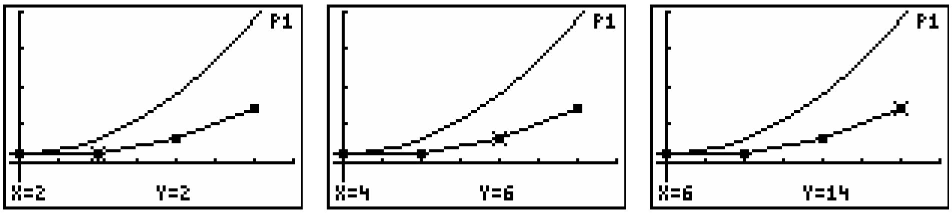
We passen dit principe toe op ons voorbeeld. Duidelijk geldt dat $y(t_0) = y(0) = y_0 = 2$.

$\underline{n=3}$

Voor $n=3$ is $h=2$ en $t_0=0, t_1=2, t_2=4, t_3=6$.

Volgens de methode van Euler is:

$y_1 = y_0 + 2\,f(t_0, y_0) = 2 + 2\cdot 0 = 2$,
$y_2 = y_1 + 2\,f(t_1, y_1) = 2 + 2\cdot 2 = 6$ en
$y_3 = y_2 + 2\,f(t_2, y_2) = 6 + 2\cdot 4 = 14$

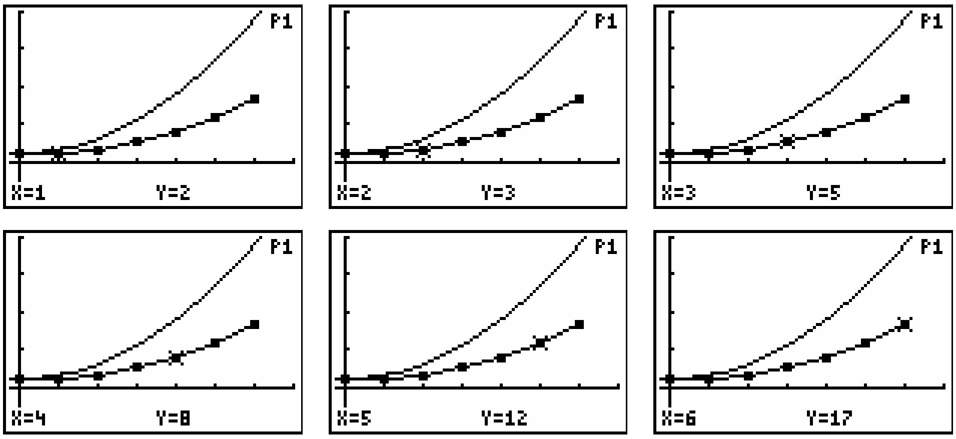


$\underline{n=6}$

Voor $n=3$ is $h=1$ en $t_0=0, t_1=1, t_2=2, \ldots, t_6=6$.

Volgens de methode van Euler is:

$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0) = 2 + 0 = 2$,
$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1) = 2 + 1 = 3$,
$y_3 = y_2 + f(t_2, y_2) = 3 + 2 = 5$
$y_4 = y_3 + f(t_3, y_3) = 5 + 3 = 8$
$y_5 = y_4 + f(t_4, y_4) = 8 + 4 = 12$
$y_6 = y_5 + f(t_5, y_5) = 12 + 5 = 17$



Het steeds vermeerderen van tussenpunten verhoogd de nauwkeurigheid van de benadering. Echter indien de functie zeer snel stijgt in het interval, is de benadering met de methode van Euler niet zo erg nauwkeurig ver uit de buurt van de beginvoorwaarde, vandaar ook het gebruik van andere meer nauwkeurig methodes waarover we hier niet uitweiden.

Om te eindigen nog een meetkundige interpretatie van de methode van Euler.

In de omgeving van t_0 wordt de oplossing benaderd door de raaklijn in t_0 waarbij $y'(t_0)$ bepaald wordt door $f(t_0, y_0) = f(t_0, y(0))$ hetgeen gekend is. Hieruit berekenen we y_1, nl. $y_1 = y_0 + h\, f(t_0, y_0) = y_0 + h\, y'(t_0) \quad (y'(t_0) = \dfrac{y_1 - y_0}{h})$.

Vanuit y_1 gaan we y_2 berekenen in de richting van $f(t_1, y_1)$, nl. $y_2 = y_1 + h\, f(t_1, y_1)$ $(f(t_1, y_1) = \dfrac{y_2 - y_1}{h})$. En dit zetten we zo verder tot we f_n berekend hebben.

1.5 Enkele exponentiële toepassingen

We vermeldden reeds dat een functie waarbij de graad van verandering evenredig is met de functie altijd een exponentiele functie is. Zo'n exponentieel verval of exponentiële groei komt in de natuur geregeld voor.

Voorbeeld 1
Radioactiefverval

Het radioactief verval op een ogenblik t, de snelheid waarmee de radioactiviteit afneemt, is evenredig met de aanwezige hoeveelheid radioactiviteit op dat ogenblik: $\dfrac{dR}{dt} = kR$.
Als er 2 keer meer deeltjes zijn, zullen ze ook 2 keer sneller verdwijnen.

k is negatief en voor elke radioactieve stof anders.

Bijvoorbeeld voor Xenon is $k = -0.14$ en wordt de differentiaalvergelijking $\dfrac{dR}{dt} = -0{,}14R$ met als oplossing $R(t) = Ce^{-0{,}14t}$.

Stel voor $t = 0$ dat $R = 10$ mg. Hieruit volgt dat $C = 10$ waardoor we de unieke oplossing $R(t) = 10e^{-0{,}14t}$ bekomen.

Hiermee kunnen we als volgt de halveringstijd berekenen:

$$5 = 10e^{-0{,}14t} \Leftrightarrow e^{0{,}14t} = 2 \Leftrightarrow 0{,}14t = \ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{0{,}14} \approx 5\ (dagen).$$

Voorbeeld 2
Afkoelingswet van Newton

De snelheid waarmee de temperatuur T van een warm voorwerp afneemt, is evenredig met het verschil tussen de temperatuur en de omgevingstemperatuur.

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = k(T - T_0) &\Leftrightarrow \frac{d(T - T_0)}{dt} = k(T - T_0) \\ &\Leftrightarrow T - T_0 = Ce^{kt} \Rightarrow T = T_0 + Ce^{kt} \\ &\Leftrightarrow T = T_0 + Ce^{kt} \end{aligned}$$

Experimenteel bepalen we dat op 2 minuten de temperatuur van een bord soep daalt van 90° C tot 80° C in een omgevingstemperatuur van 20° C.

Dit betekent voor $t = 0$ dat $90 = 20 + Ce^0 \Leftrightarrow C = 70$ en dat

$80 = 20 + 70e^{2k} \Leftrightarrow e^{2k} = \frac{6}{7} \Leftrightarrow 2k = \ln\frac{6}{7} \Rightarrow k \approx -0,077$.

We bekomen voor het beginvoorwaadenprobleem de unieke oplossing

$T = 20 + 70e^{-0,077t}$.

Men kan zo de temperatuur berekenen na een gegeven tijd of ook de tijd bepalen wanneer de soep een bepaalde temperatuur zal hebben. Soep moet warm gedronken worden hetgeen vaak 50° C betekent.

Voorbeeld 2
Wanneer werd de moord gepleegd?

Er werd een moord gepleegd en om 24.00 uur ($t = 0$) werd een lichaamstemperatuur gemeten van 29,4 °C. Twee uur later was de temperatuur 27,3 °C.

De kamertemperatuur was 21 °C en we nemen aan dat de lichaamstemperatuur op het ogenblik van de moord 37 °C was. Wat is het vermoedelijke tijdstip van de moord?

Als de snelheid waarmee de temperatuur van het lichaam afkoelt evenredig is met het temperatuurverschil van het lichaam en de omgevingstemperatuur, kunnen we stellen dat:

$\frac{dT}{dt} = A(T(t) - 21)$ met als algemene oplossing $T(t) = 21 + Ce^{At}$.

Uit de gegegevens kunnen we A en C berekenen.

$T(0) = 29,4 = 21 + Ce^0 \Rightarrow C = 8,4$.

Twee uur later geldt dat $T(2) = 27,3 = 21 + 8,4e^{2A} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\ln\frac{6,3}{8,4} = -0,1438$.

Dit geeft de unieke oplossing $T(t) = 21 + 8,4e^{-0,1438t}$.

Om het vermoedelijk tijdstip van de moord te ontdekken, stellen we ons de vraag wanneer de lichaamstemperatuur gelijk was aan 37 °C?

Invullen in de oplossing geeft: $37 = 21 + 8,4e^{-0.1438t}$ zodat $t = -4,48$. Hetgeen ongeveer overeenkomt met -4 uren en 29 minuten, m.a.w. de moord gebeurde vermoedelijk om 19:31 uur.