Opgaven

Opgave 1

a. Itereer met $F(x) = \frac{x}{2}$ en als startwaarden $\frac{1}{16}$ en 100.

$$\frac{1}{16} \to ..... \to ...... \to ...... \to ...... \to ......$$

$$100 \to ...... \to ...... \to ...... \to ...... \to ......$$

b. Stel de banen grafisch voor in een tijdgrafiek.

c. Formuleer het gedrag van deze banen. (belangrijk is in te schatten wat er gebeurt bij het verder zetten van het iteratieproces).

Kan je een startwaarde bedenken waarvan de baan zich anders gedraagt?

Opgave 2

a. Voer de onderstaande iteraties uit voor $F(x) = x^2$ (5 stappen).

$$x_0 = 0 \to ...... \to ......$$

$$x_0 = 1 \to ...... \to ......$$

$$x_0 = -1 \to .... \to ......$$

$$x_0 = 2 \to ...... \to ......$$

$$x_0 = \frac{1}{2} \to ...... \to ......$$

b. Stel in een tijdgrafiek de banen voor van 1; 2 en $\frac{1}{2}$.

c. Formuleer het gedrag van de banen berekend in punt b.

OPGAVE 3

a. Plot de grafiek van $F(x) = x^2$ en van $G(x) = x$ en bepaal grafisch de snijpunten.

Bepaal deze snijpunten ook algebraïsch.

b. Vergelijk deze oplossingen met sommige startwaarden uit Opgave 2.a.

OPGAVE 4

a. Bepaal grafisch de vaste punten van $F(x) = x^2 - 2$ en verifieer dit algebraïsch.

b. Bepaal grafisch de vaste punten van $F(x) = \cos x$.
Kan je dit ook algebraïsch geverifieerd worden?

OPGAVE 5

a. Bepaal de baan van 0 voor $F(x) = x^2 - 1$: $0 \to$..........

b. Bepaal de baan van -1 voor $F(x) = x^2 - 1$: -1 $\to$...........

c. Welke operator, in functie van F, moet je uitvoeren op 0 om terug 0 te bekomen?

En voor -1 terug -1 te bekomen? ……(0) = 0 en …..(-1) = -1

OPGAVE 6

Bepaal de vaste punten en de 2-cyclus van $F(x) = x^2 - 1$.

OPGAVE 7

a. Bestudeer de webdiagrammen voor verschillende startwaarden bij $F(x)=2x$.
Conclusie?

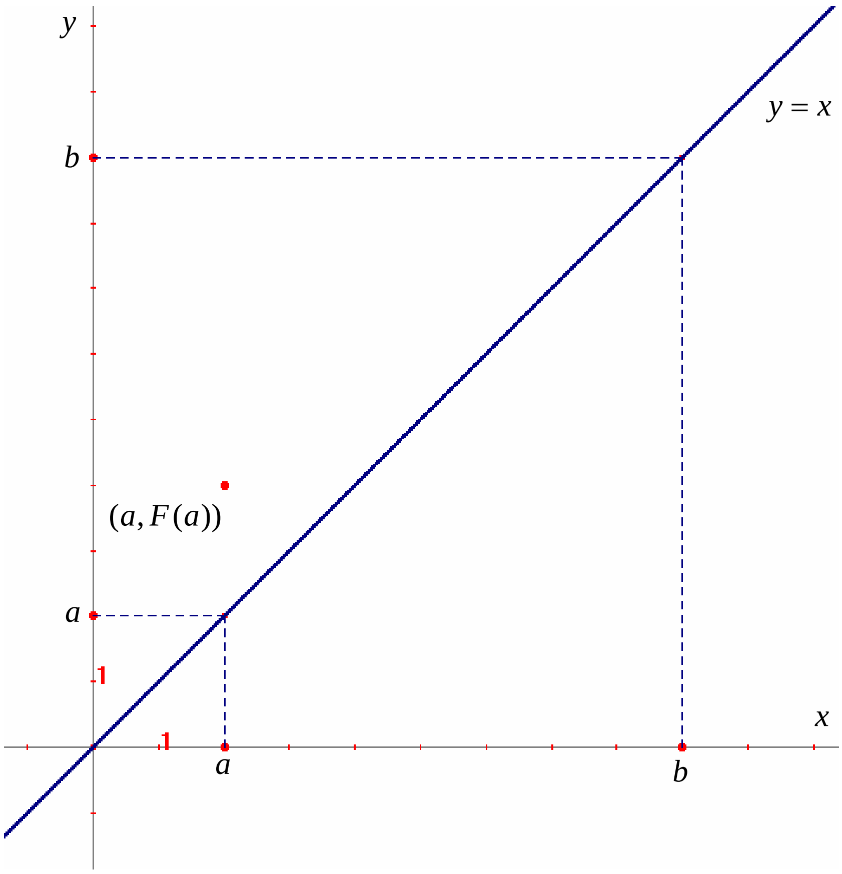
b. Bestudeer de webdiagrammen voor verschillende startwaarden bij $F(x)=\frac{1}{2}x$.
Conclusie?

c. Bestudeer de webdiagrammen voor verschillende startwaarden bij $F(x)=-2x$.
Conclusie?

d. Bestudeer de webdiagrammen voor verschillende startwaarden bij $F(x)=-\frac{1}{2}x$.
Conclusie?

OPGAVE 8

Teken de grafiek van een willekeurige continue functie $F:[a,b]\to[a,b]$, vertrekkende van het punt $(a,F(a))$. Conclusie?



OPGAVE 9

Een bevolkingsmodel

Biologie is een heel dankbare wetenschap voor het opstellen van één of ander wiskundig model. Het studiemateriaal is over het algemeen zó ingewikkeld dat men naar de wiskunde grijpt om een overzichtelijke beschrijving te geven. Door met slechts een paar wetmatigheden rekening te houden, verliest men weliswaar enige feeling met het onderwerp van studie (dieren worden bv. getallen) maar de handelbaarheid is uiteraard een grote bonus. Bovendien bestudeert men meestal maar een klein deel van het onderwerp.

Een mooi voorbeeld is het model dat de voortplanting bij konijnen beschrijft bij een overvloed aan ruimte en voedsel en zonder natuurlijke vijanden (zoals dat het geval was toen men deze langoor een paar eeuwen geleden in Australië losliet). We gaan ervan uit dat het aantal konijnen in de volgende generatie evenredig is met het aantal konijnen dat er al was. Een dergelijke relatie is wiskundig gemakkelijk uit de drukken met behulp van een functie.

Als x het aantal konijnen in een generatie voorstelt, wordt het volgende aantal gegeven door $f(x) = c \cdot x$ waarbij c een positieve constante is, die een maat vormt voor het gemiddeld aantal nakomelingen dat elk konijn heeft. Het bestuderen van de evolutie van de konijnenpopulatie is zo herleid tot het berekenen van de opeenvolgende interaties van f : $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots$ Zie opgave 7 voor enkele voorbeelden.

Het mag duidelijk zijn dat, bij voldoende ruimte en voedsel, en zonder jacht of natuurlijke vijanden, een konijnenpopulatie in een mum van tijd door het dak gaat. Natuurlijk was ons model een tikje te eenvoudig (hoewel het een goed idee geeft van de problemen waarmee Australische parkwachters geconfronteerd werden) omdat de veronderstellingen zich nooit voordoen.

Bekijken we nu even terug onze modelvergelijking $f(x) = cx$. Wat ons vooral interesseert is de “baan” die een punt aflegt onder opeenvolgende iteraties van f :

$$x, f(x), f^3(x), \ldots, f^n(x), \ldots.$$

Om de evenwichtspunten van f te bepalen lossen we de volgende vergelijking op:

$$f(x) = x \Leftrightarrow cx - x = 0 .$$

Indien $c = 1$ zijn alle punten evenwichtspunten en indien $c \neq 1$ is $x = 0$ het enige evenwichtspunt.

Ook voor andere punten is de baan eenvoudig te berekenen: $f(x) = cx$ zodat $f^2(x) = c.cx = c^2x$. We kunnen nagaan dat $f^n(x) = c^n x$ zodat het verloop van de baan volledig afhangt van de constante c .

- $|c| < 1$

  Dan zal $c^n \to 0$ als $n \to \infty$. Dus $f^n(x) \to 0$ als $n \to \infty$.

- $|c| = 1$

  Ofwel $f(x) = x$, m.a.w. allemaal evenwichtspunten.

  Ofwel $f(x) = -x$. Deze afbeelding heeft de bijzondere eigenschap dat $f^2(x) = f(-x) = x$ de identieke afbeelding oplevert. Er is dus één evenwichts-punt, en alle andere punten hebben periodieke banen met periode 2.

- $|c|>1$

  Dan zal $|c|^n \to +\infty$ als $n \to \infty$. Het enige evenwichtspunt is weer $x = 0$.
  We onderscheiden:

  (i) Als $c > 1$ en $x > 0$ dan zal $f^n(x) \to +\infty$ als $n \to \infty$.

  (ii) Als $c > 1$ en $x < 0$ dan zal $f^n(x) \to -\infty$ als $n \to \infty$.

  (iii) Als $c < -1$, dan zal de baan van een punt $x \neq 0$ bestaan uit afwisselend negatieve en positieve punten, die zich verder en verder van de oorsprong $x = 0$ verwijderen.

Laten we ons model nu een tikje ingewikkelder maken, bijvoorbeeld door aan te nemen dat ons model rekening moet houden met beperkingen in ruimte en voedsel. Als we aannemen dat het ecosysteem niet meer dan 1000 konijnen aankan, dan kunnen we de vergelijking herschrijven als $f(x) = D.x(1000 - x)$ met $D > 0$ en $0 \leq x \leq 1000$.

Op de term in x^2 na is de vergelijking gelijkaardig aan de voorgaande. Voor kleine populaties zal de groei met de kwadratische term inbegrepen vergelijkbaar zijn met de lineaire. Voor grote populaties geeft de kwadratische vergelijking duidelijk aan dat het overschot aan konijnen een afname zal inhouden voor de volgende generatie.

Vanuit een wiskundig standpunt is het duidelijker om de gelijkaardige vergelijking $F(x) = m.x(1 - x)$ met $m > 0$ en $0 \leq x \leq 1$ te bestuderen. We kunnen dit interpreteren als het bekijken van verhoudingen van populaties ten opzichte van hun theoretische maximum.

Bij het lineaire model was de studie eenvoudig omdat we een expliciete uitdrukking voor de n-de iteratie $f^n(x_0)$ konden opschrijven. Dit is nu niet meer het geval.

In het algemeen is $f^n(x)$ een veelterm van de 2^n-de graad. Bijvoorbeeld :

$$f^2(x) = m^2(1-x)x(1-mx+mx^2)$$
$$f^3(x) = m^3(1-x)x(1-mx+mx^2)(1-m^2(1-x)x(1-mx+mx^2))$$

We bestuderen het dynamisch gedrag van deze functie met grafische analyse, m.a.w. zonder dat we een uitdrukking voor $f^{(n)}(x)$ kennen.

We proberen ons een idee te vormen van het gedrag van het dynamisch systeem $f_m(x) = mx(1-x)$ met $m \in]0,4]$ en $x \in [0,1]$.

1. Bereken de evenwichtspunten van $f_m(x) = mx(1-x)$ i.f.v. m.

2. We bestuderen enkele banen om een idee te krijgen van het dynamisch gedrag van $f_m(x) = mx(1-x)$.

   a. $m < 1$ en $x \in [0,1]$. Bijvoorbeeld $m = 0.5$.

x_0	0.4	0.6	0.8
$f(x_0)$			
$f^2(x_0)$			
$f^3(x_0)$			
$f^{10}(x_0)$			
$f^{20}(x_0)$			

Welk resultaat kan je afleiden uit dit experiment?

Hoe kan je dit resultaat interpreteren voor het bevolkingsmodel?

Controleer je geformuleerde resultaat voor verschillende $m < 1$ met grafische analyse.

b. $1 < m < 3$ en $x \in [0,1]$. Bijvoorbeeld $m = 2$

x_0	0.2	0.5	0.8
$f(x_0)$			
$f^2(x_0)$			
$f^3(x_0)$			
$f^{10}(x_0)$			
$f^{20}(x_0)$			

Welk resultaat kan je afleiden uit dit experiment?

Hoe kan je dit resultaat interpreteren voor het bevolkingsmodel?

Controleer je geformuleerde resultaat voor verschillende $1 < m < 3$ met grafische analyse.

c. $3 < m < 3.45$ en $x \in [0,1]$. Bijvoorbeeld $m = 3.2$.

x_0	0.2	0.6	0.6875	0.8
$f(x_0)$				
$f^2(x_0)$				
$f^3(x_0)$				
$f^{10}(x_0)$				
$f^{20}(x_0)$				
$f^{21}(x_0)$				
$f^{22}(x_0)$				
$f^{23}(x_0)$				

Welk resultaat kan je afleiden uit dit experiment?

Hoe kan je dit resultaat interpreteren voor het bevolkingsmodel?

Controleer je geformuleerde resultaat voor verschillende $3 < m < 3.45$ met grafische analyse.

d. $3.45 < m < 3.54$ en $x \in [0,1]$. Bijvoorbeeld $m = 3.5$.

x_0	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(x_0)$				
$f^2(x_0)$				
$f^3(x_0)$				
$f^{10}(x_0)$				
$f^{20}(x_0)$				
$f^{21}(x_0)$				
$f^{22}(x_0)$				
$f^{23}(x_0)$				
$f^{24}(x_0)$				

Welk resultaat kan je afleiden uit dit experiment?

Hoe kan je dit resultaat interpreteren voor het bevolkingsmodel?

Controleer je geformuleerde resultaat voor verschillende $3.45 < m < 3.54$ met grafische analyse.

e. $m = 4$ en $x \in [0,1]$

Bestudeer de baan voor onderstaande punten x_0 onder opeenvolgende iteraties van $f_4 = 4x(1-x)$. Plot ook de bijhorende webdiagrammen. Conclusie?

x_0	0.2	0.4	0.75	0.76
$f(x_0)$				
$f^2(x_0)$				
$f^3(x_0)$				
$f^{10}(x_0)$				
$f^{20}(x_0)$				
$f^{30}(x_0)$				
$f^{40}(x_0)$				
$f^{50}(x_0)$				