Iteratie
Zelfstudieopdracht 8

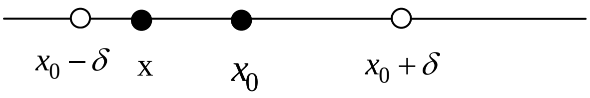
Aantrekkende cycli

1. Beginvoorwaarden: F is eencontinue functie in $[x, x_0]$,
   F is afleidbaar in $]x, x_0[$.

   Als x_0 een vast punt is van F dan is $F(x_0)$ = …. (1)

   en als x_0 bovendien aantrekkend is dan is $|F'(x_0)| <$..... (2)

   Stel dat er een strikt positief getal δ bestaat zodat voor elke x van $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ geldt dat $|F'(x)| < 1$. (3)



   Pas de middelwaardestelling toe voor x en x_0, gebruik (1) en (3) om te besluiten dat:
   $|F(x) - x_0| < |x - x_0|$.

   Wat besluit je dan over de afstand van x en $F(x)$ t.o.v. x_0?
   Herhaal deze redenering voor de afstand van $F(x)$ en $F^2(x)$ t.o.v. x_0?
   En algemeen van $F^n(x)$ en de vorige machten van F t.o.v. x_0?

2. Aantrekkend periodiek punt

   a. Neem $F(x) = x^2 - 1$ en bereken de vaste punten van F en van F^2.
      Welk is de 2-cyclus van F?

   b. Bepaal met een webgrafiek de baan van een aantal startwaarden x_0
      met als voorwaarde: -1,618…=$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < x_0 < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618...$
      en $x_0 \notin \{0, 1, -1\}$ (Waarom niet?).

      Wat stel je van al deze banen vast?

   c. Bepaal de baan vaan -1,7 en van 1,8 en wat stel je dan vast?

3. Neem de 2-cyclus: $x_0 \to x_1 \to x_0 \to x_1 \to .....$

Definitie: Een periodiek punt x_0 met periode 2 is aantrekkend op voorwaarde dat x_0 een aantrekkend vast punt is van F^2.

In analogie met de definitie van aantrekkend vast punt van F kunnen we stellen:
x_0 is een aantrekkend vast punt van $F^2 \Leftrightarrow ....$

Controleer dit in voorgaand voorbeeld.

Formuleer een gelijkaardige eigenschap voor een 3-cyclus en een n-cyclus.

Deze redenering voortzetten genereert een bijkomend probleem.

Als F een veeltermfunctie is van graad 2, is F^2 van graad …., F^3 van graad ….,
F^n van graad … en de afgeleide bepalen wordt alsmaar moeilijker.

Pas de kettingregel, $(f(g(x))' = g'(x).f'(g(x))$, toe op $(F^2(x))' = (F(F(x))'$

Bereken dan $(F^2(x_0))'$ en denk eraan dat $x_0 \underset{F}{\to} x_1 \underset{F}{\to} x_0 \underset{F}{\to} x_1 \underset{F}{\to} .....$

Herhaal dit nu voor $(F^3(x_0))'$ als $x_0 \to x_1 \to x_2 \to x_0 \to x_1 \to x_2 \to ...$

Bepaal de vereenvoudigde formule voor $(F^n(x_0))'$ met x_0 behorende tot een n-cyclus.